Somme superiori e inferiori

Materiale integrativo del

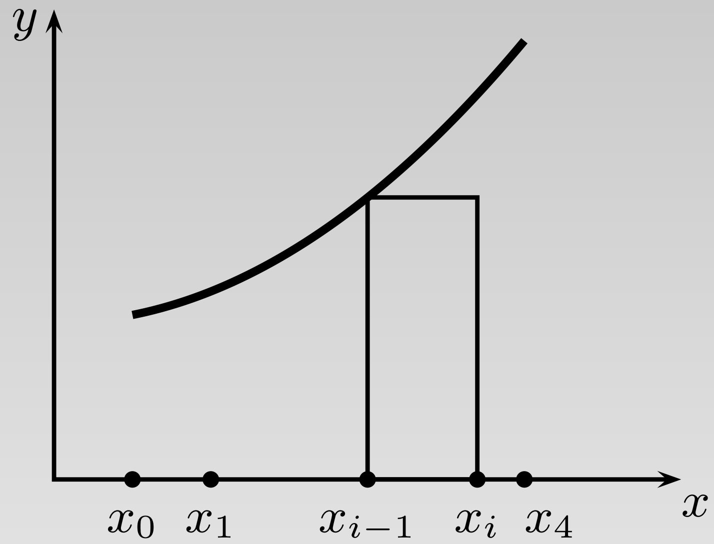
Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

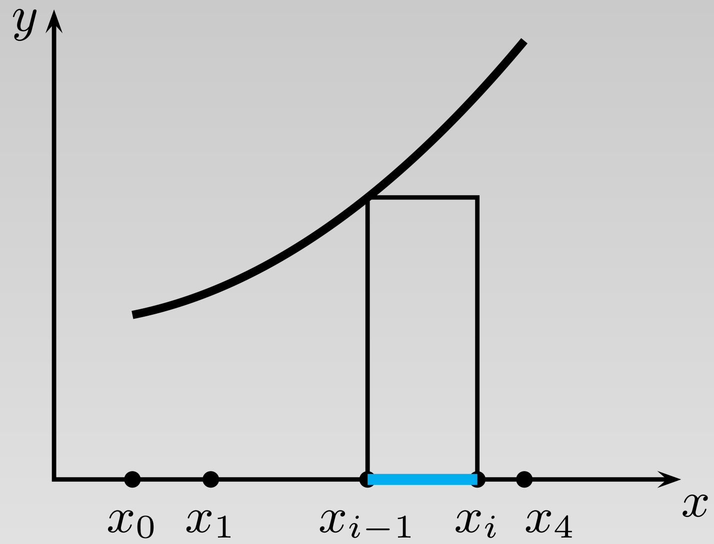
Paolo Baiti, Lorenzo Freddi

Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

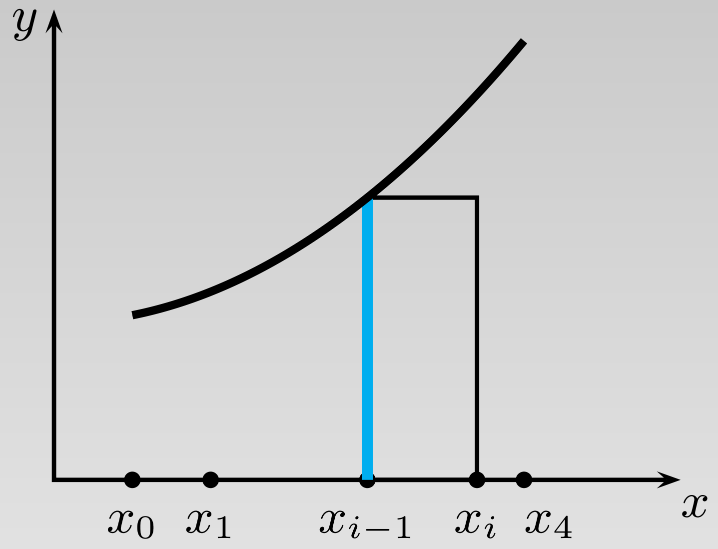
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1})$$

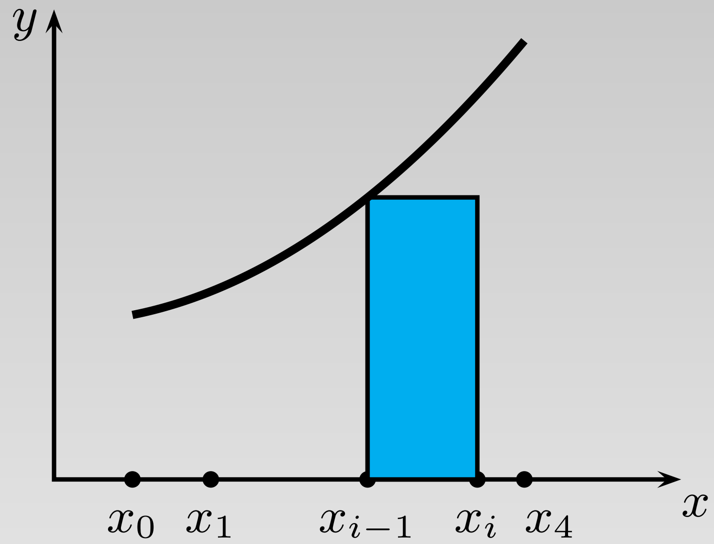
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

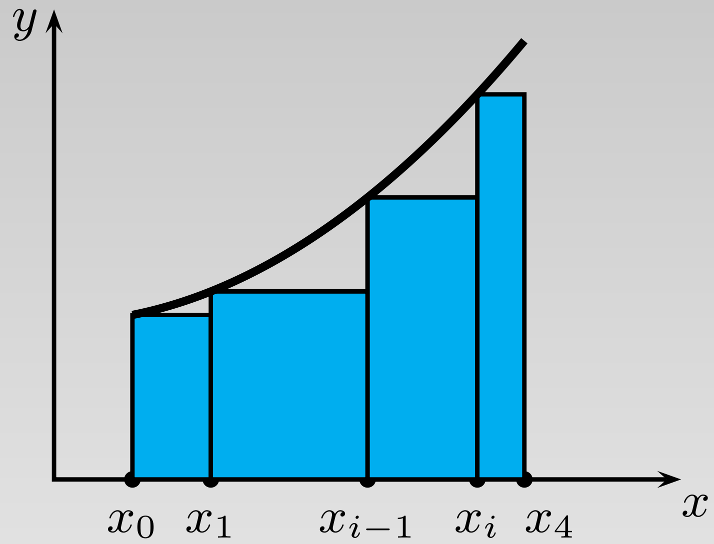
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

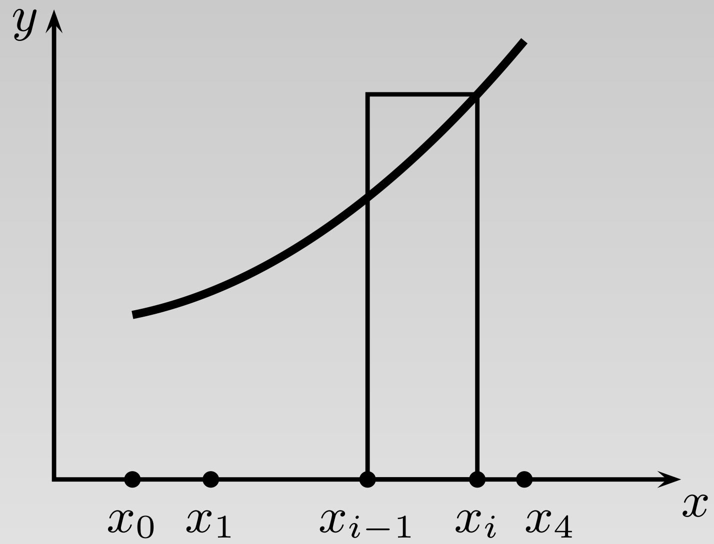
Somma inferiore



Consideriamo una partizione di $[a, b]$. Sul generico intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ costruiamo il rettangolo di figura. Sommando

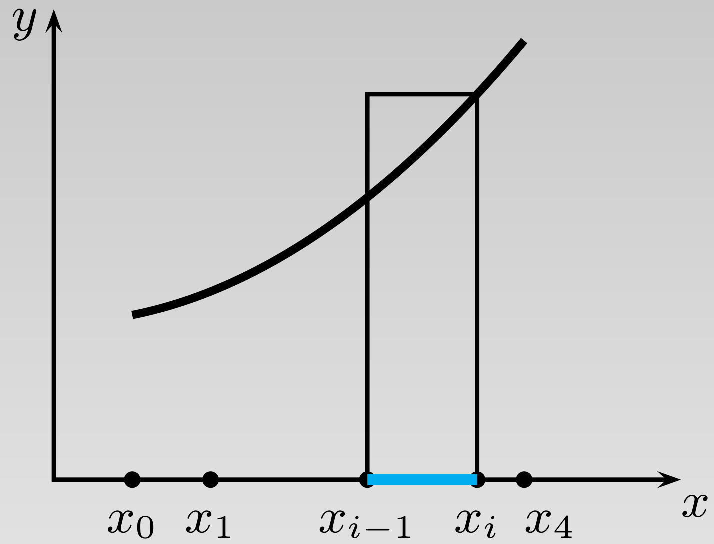
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

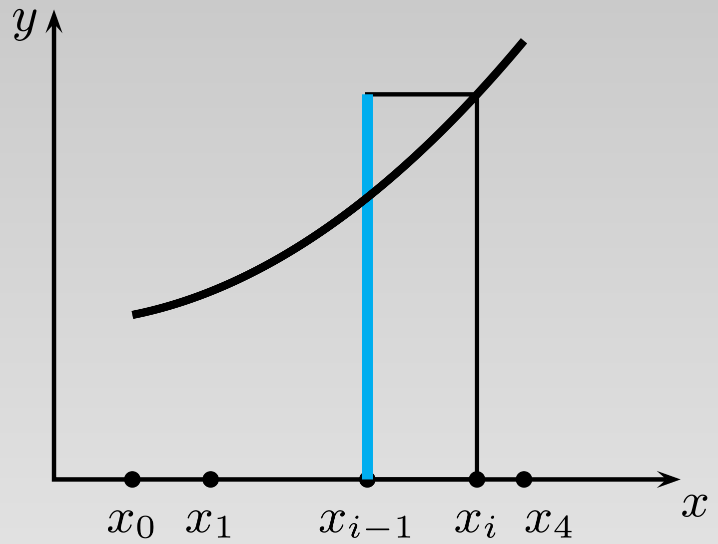
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1})$$

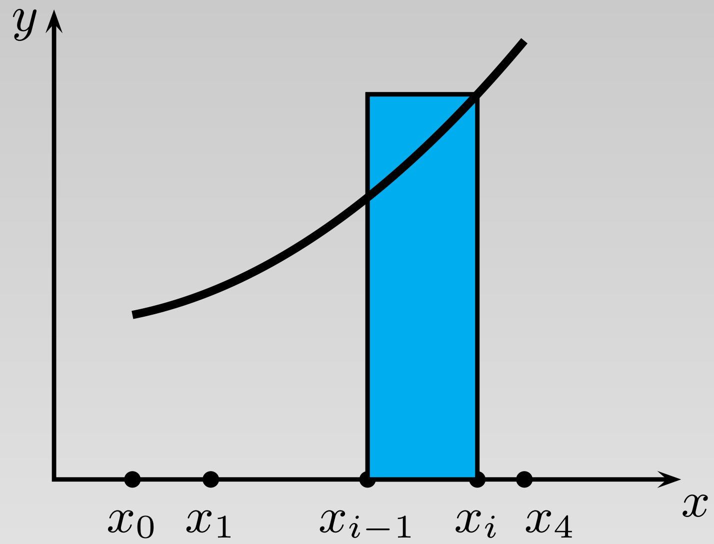
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

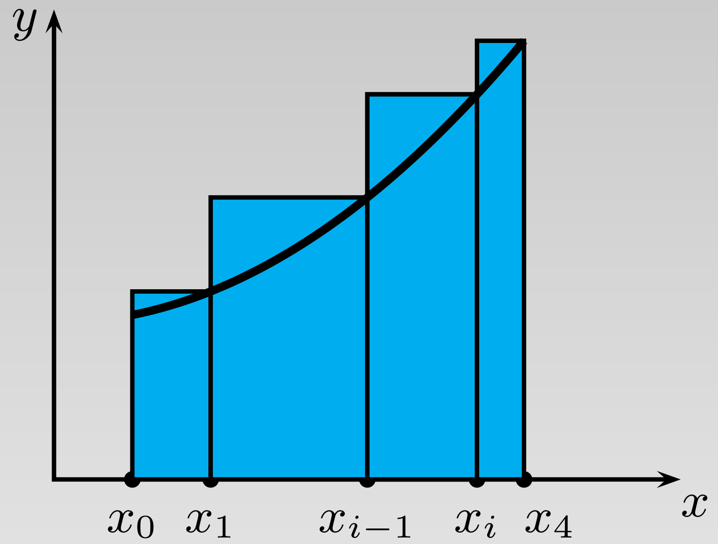
Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura, con area

$$(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

Somma superiore



Analogamente consideriamo il rettangolo di figura. Sommando

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

Interpretazione geometrica

$s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ hanno il significato geometrico di somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti, rispettivamente, al sottografico di f

Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

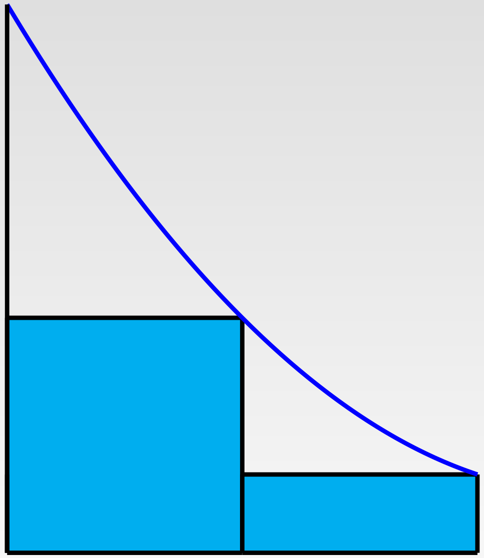
Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza

Esempio

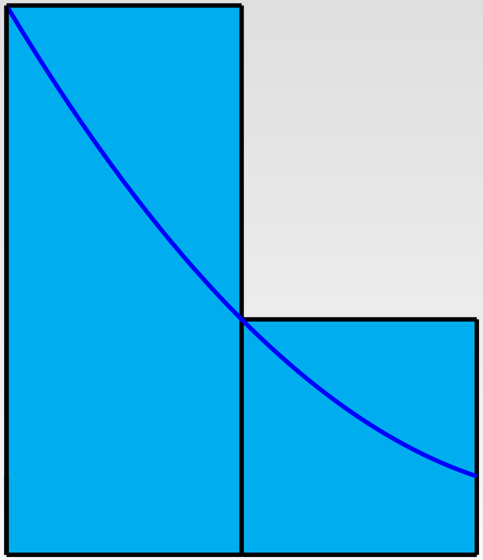
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0,2]$$

Compariamo $s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f,2) = 4.0000$



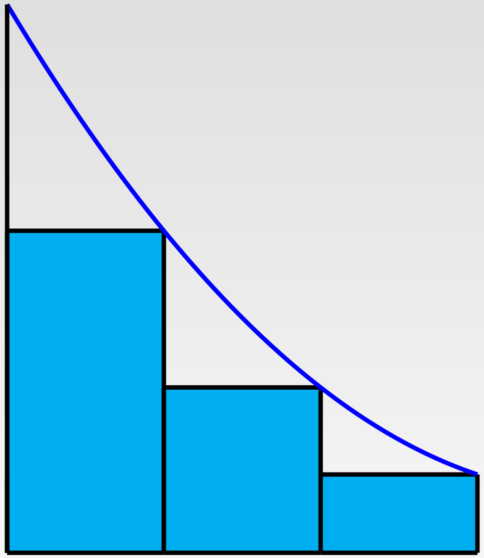
$S(f,2) = 10.0000$

Esempio

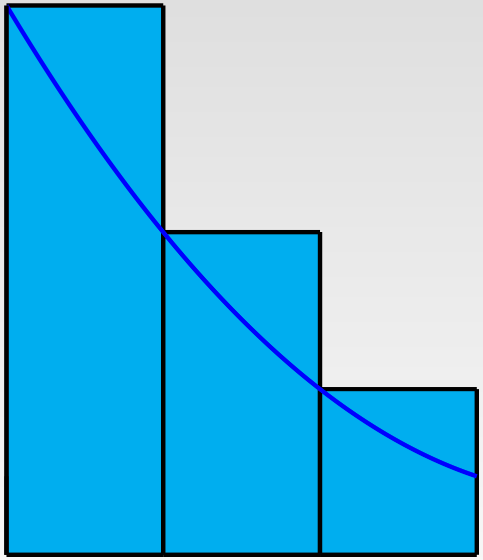
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 3) = 4.8148$



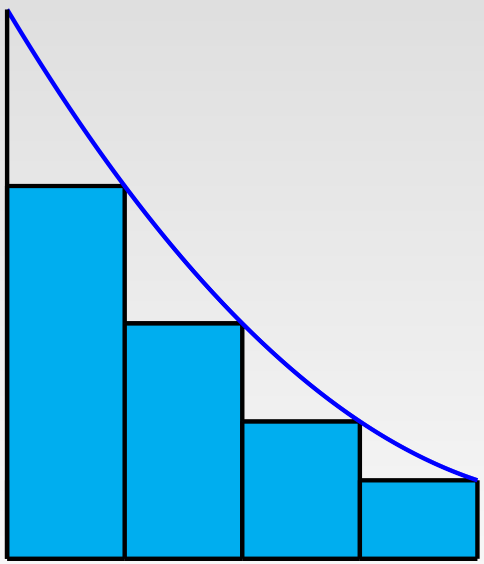
$S(f, 3) = 8.8148$

Esempio

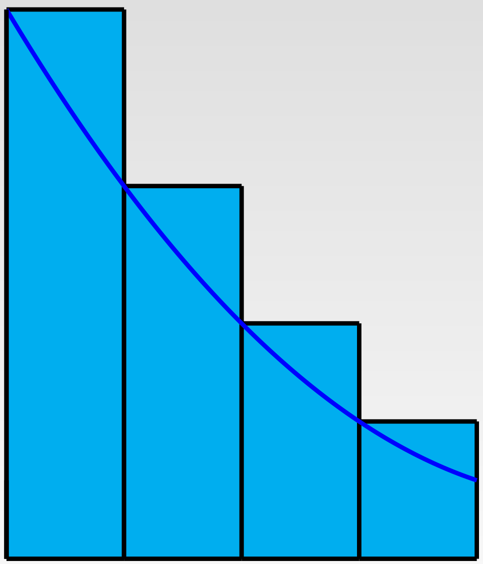
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 4) = 5.2500$



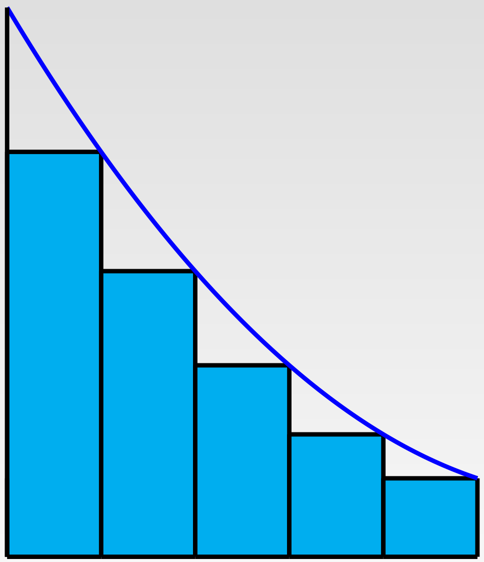
$S(f, 4) = 8.2500$

Esempio

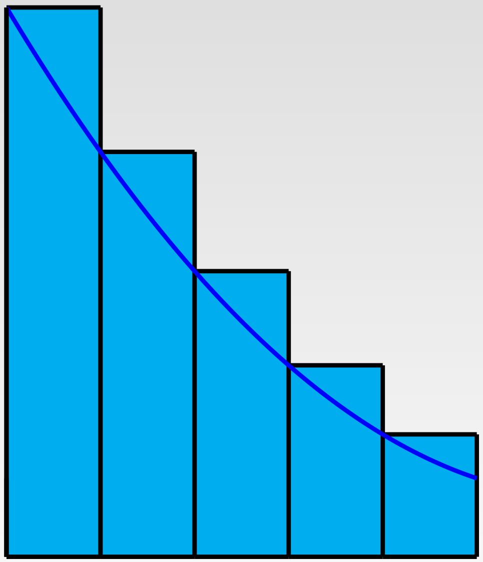
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 5) = 5.5200$



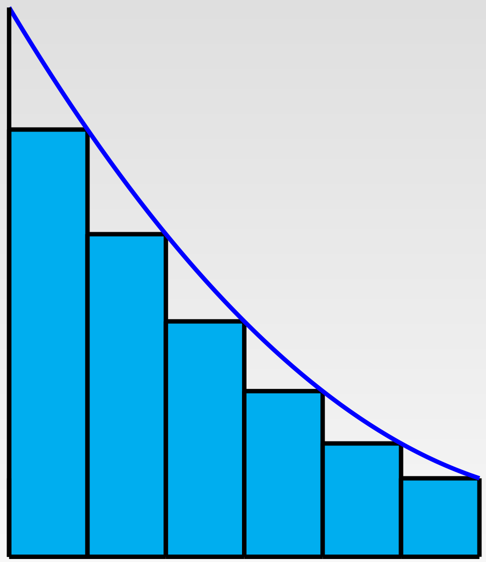
$S(f, 5) = 7.9200$

Esempio

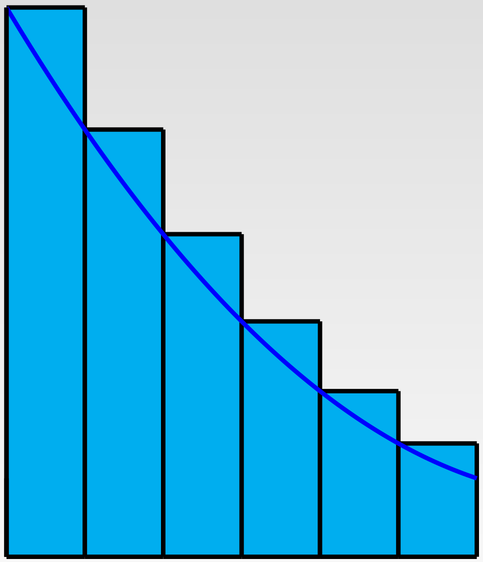
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0,2]$$

Compariamo $s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f,6) = 5.7037$



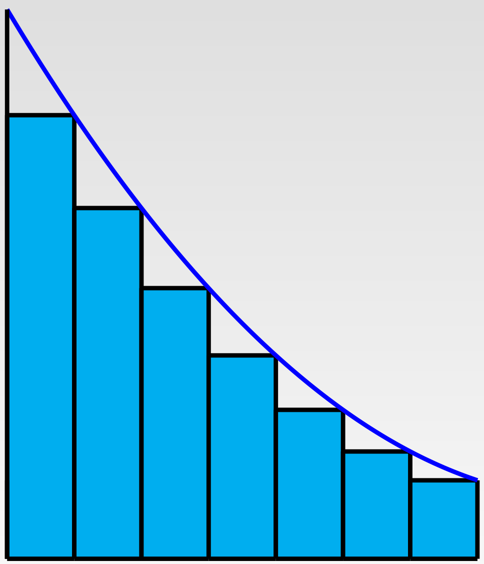
$S(f,6) = 7.7037$

Esempio

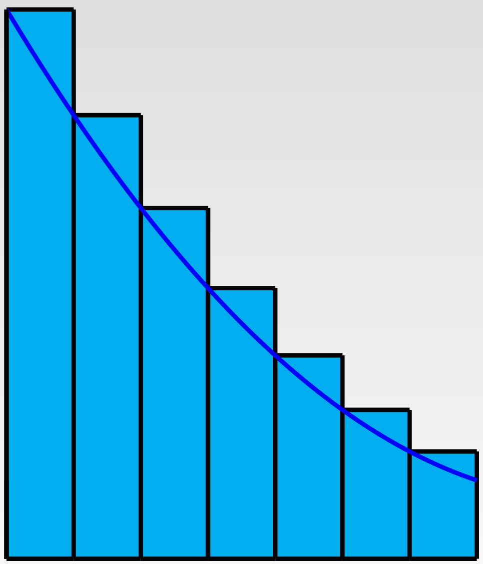
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0,2]$$

Compariamo $s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f,7) = 5.8367$



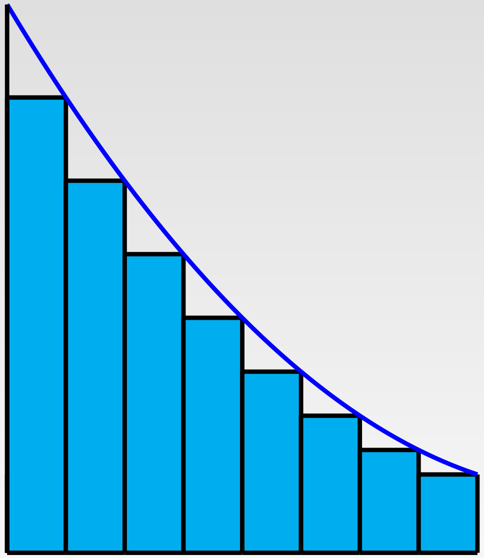
$S(f,7) = 7.5510$

Esempio

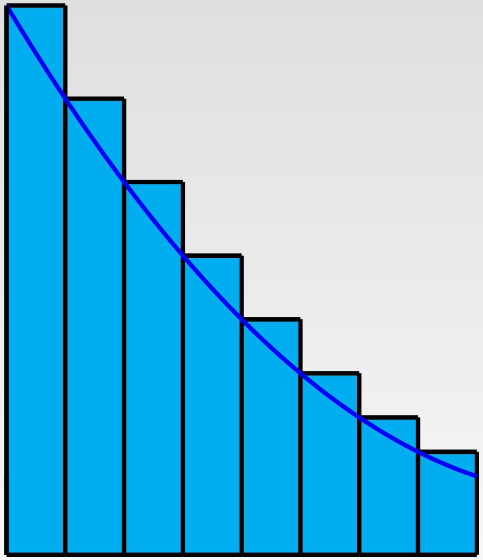
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0,2]$$

Compariamo $s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f,8) = 5.9375$



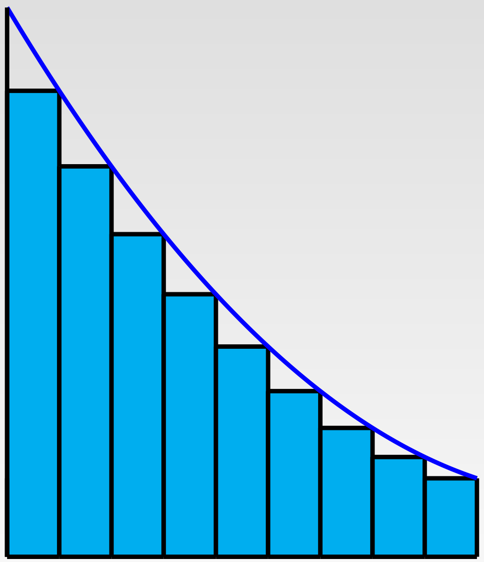
$S(f,8) = 7.4375$

Esempio

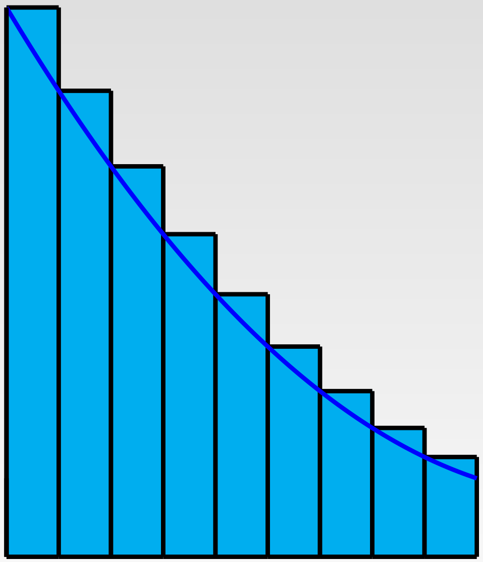
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$$s(f, 9) = 6.0165$$



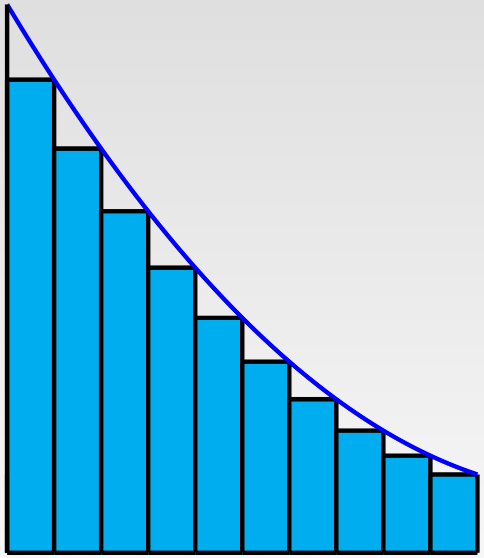
$$S(f, 9) = 7.3498$$

Esempio

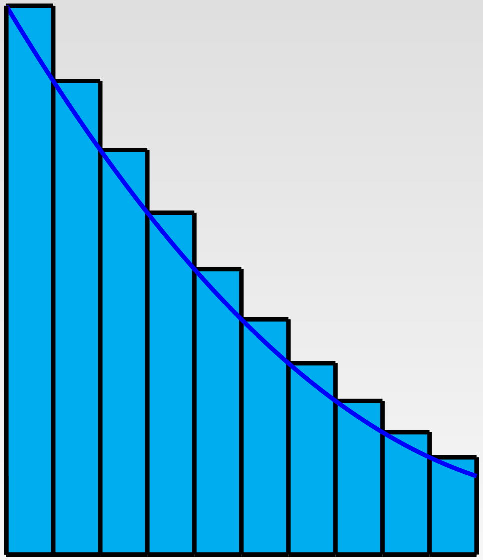
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 10) = 6.0800$



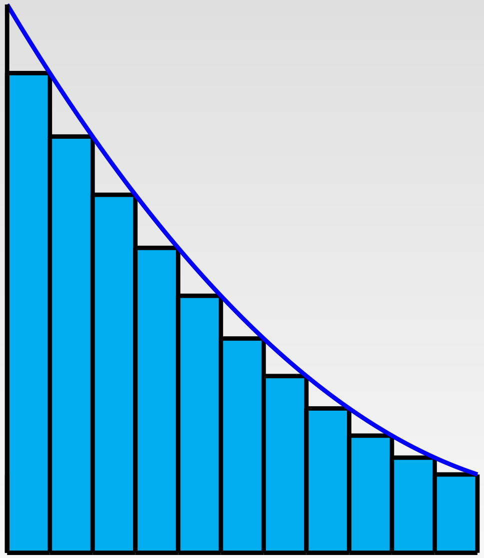
$S(f, 10) = 7.2800$

Esempio

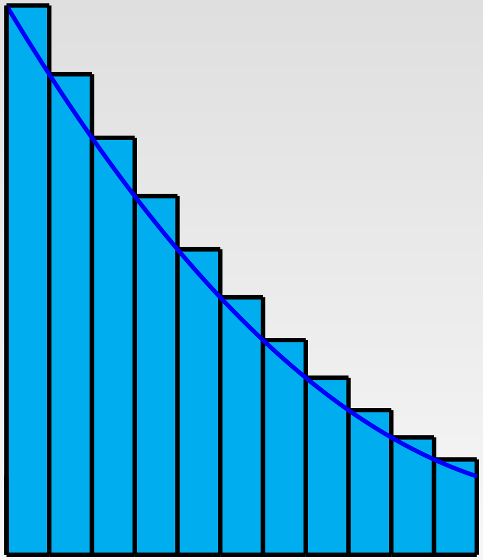
Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x \in [0, 2]$$

Compariamo $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ per partizioni in n intervallini di uguale ampiezza



$s(f, 11) = 6.1322$



$S(f, 11) = 7.2231$

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza.

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza.

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f,n)$ e $s(f,n)$ diventa sempre più piccola.

In tabella sono riportati i valori delle somme inferiori e superiori per varie partizioni in n intervallini di uguale ampiezza.

n	$s(f,n)$	$S(f,n)$
5	5.54	7.92
10	6.08	7.28
100	6.6068	6.7268
1000	6.6606	6.6726
10000	6.6660	6.6672
100000	6.6666	6.6667

Dalla tabella si vede che la differenza tra le aree $S(f,n)$ e $s(f,n)$ diventa sempre più piccola.
In effetti, calcolando l'integrale si troverà che

$$\int_0^2 x^2 - 5x + 7\, dx = \frac{20}{3} = 6.6666...$$