Limite di $x \operatorname{sen}(1/x)$

Materiale integrativo del

Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Paolo Baiti, Lorenzo Freddi

Limite finito per $x \longrightarrow x_0$

Siano $f:]a,b[\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$.

Si dice che f ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a x_0, e si scrive

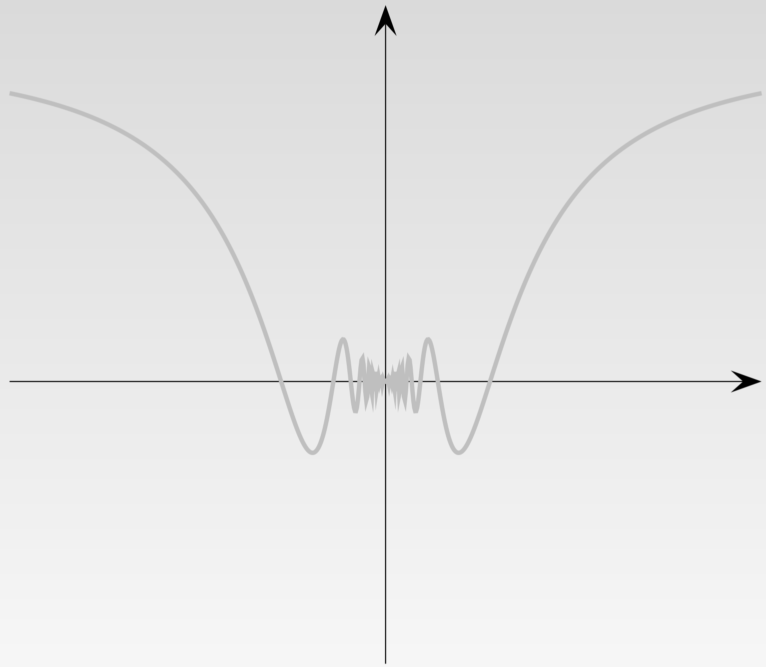
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ per ogni $x \in]a,b[\setminus\{x_0\}$ tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

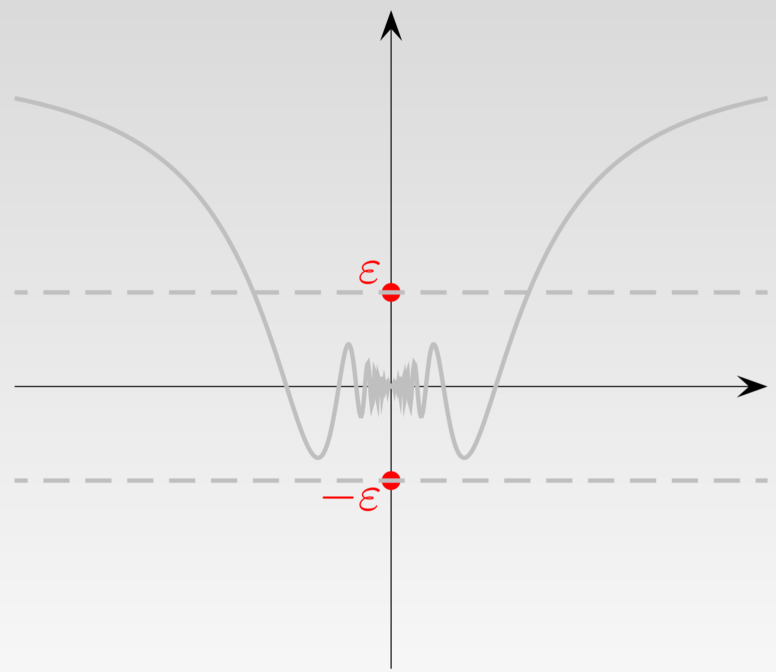
$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$



Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Dato $\varepsilon > 0$



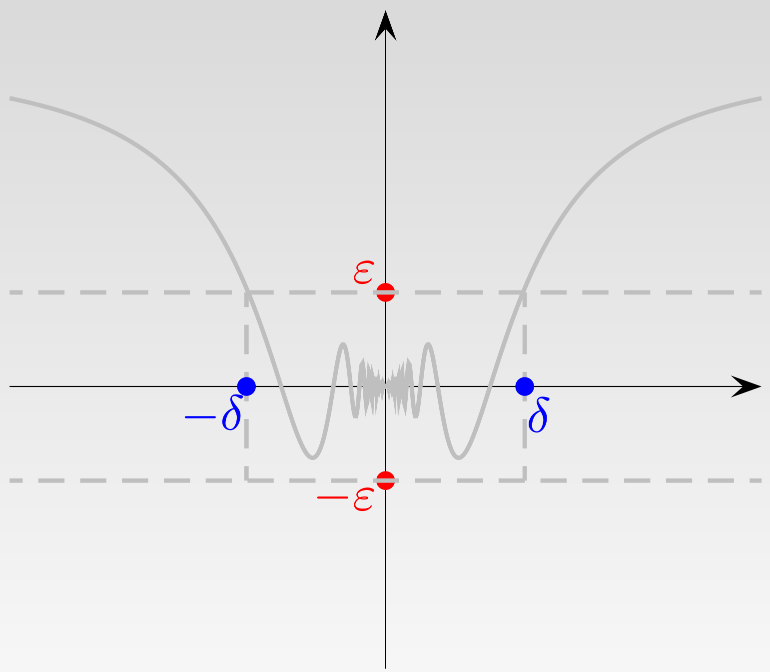
Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Dato $\varepsilon > 0$

esiste $\delta > 0$



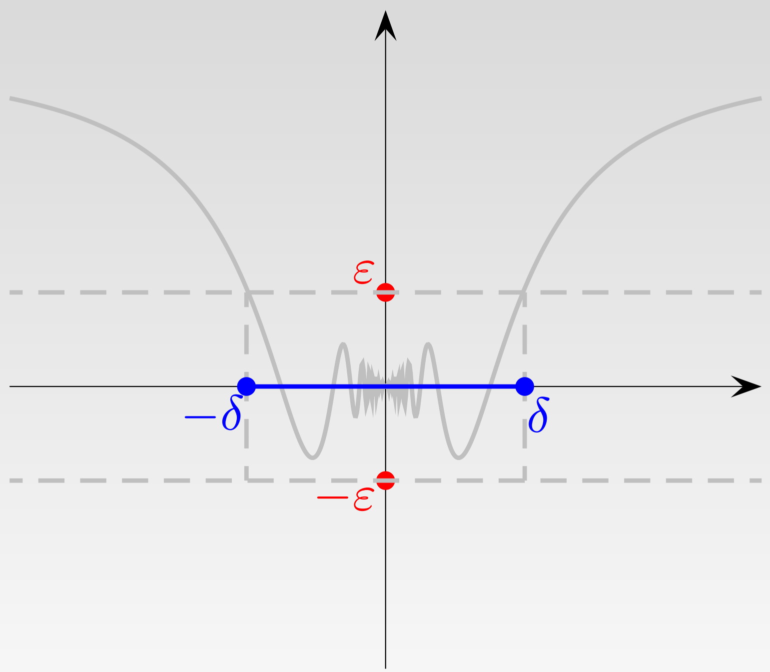
Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Dato $\varepsilon > 0$

esiste $\delta > 0$ tale che se

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$



Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Dato $\varepsilon > 0$

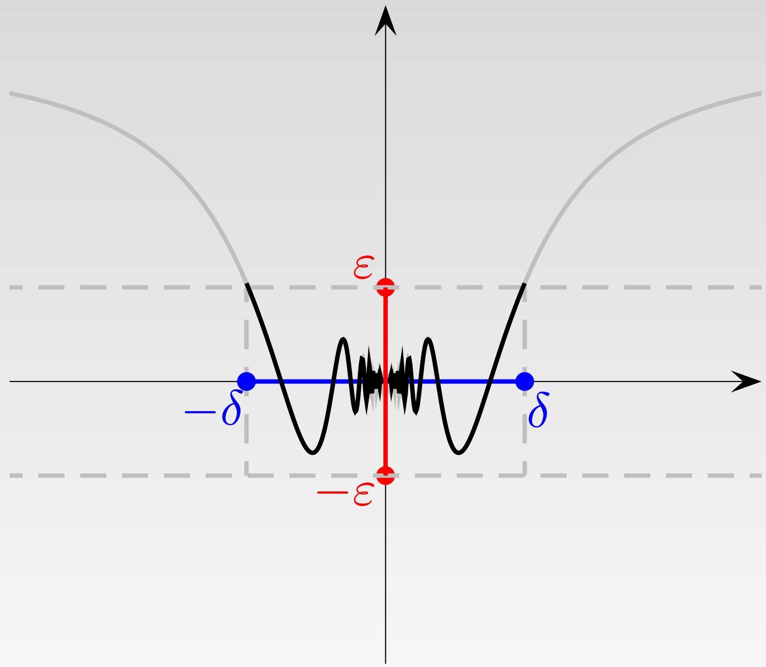
esiste $\delta > 0$ tale che se

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

allora

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

con $\ell = 0$ e $x_0 = 0$

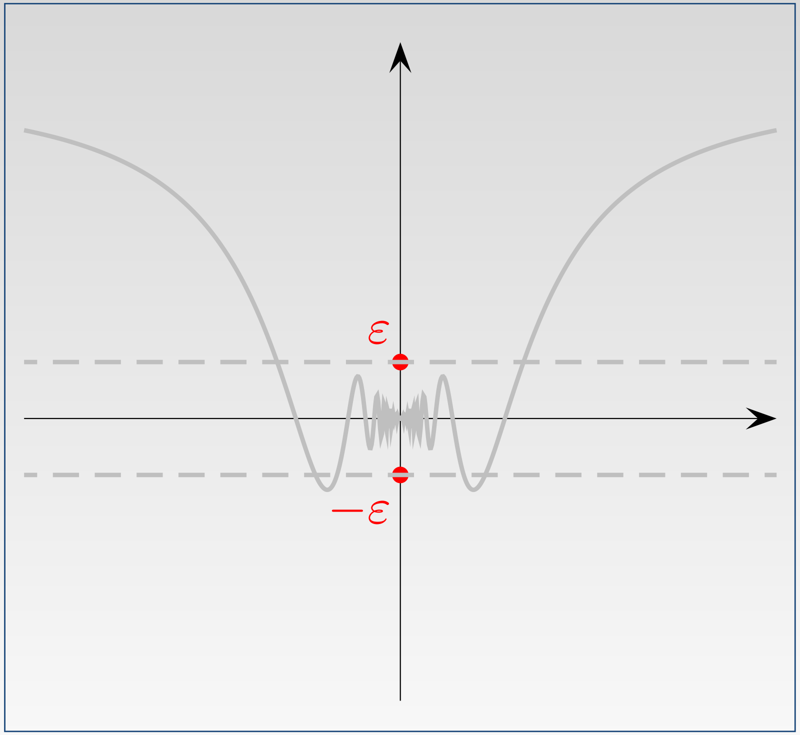


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

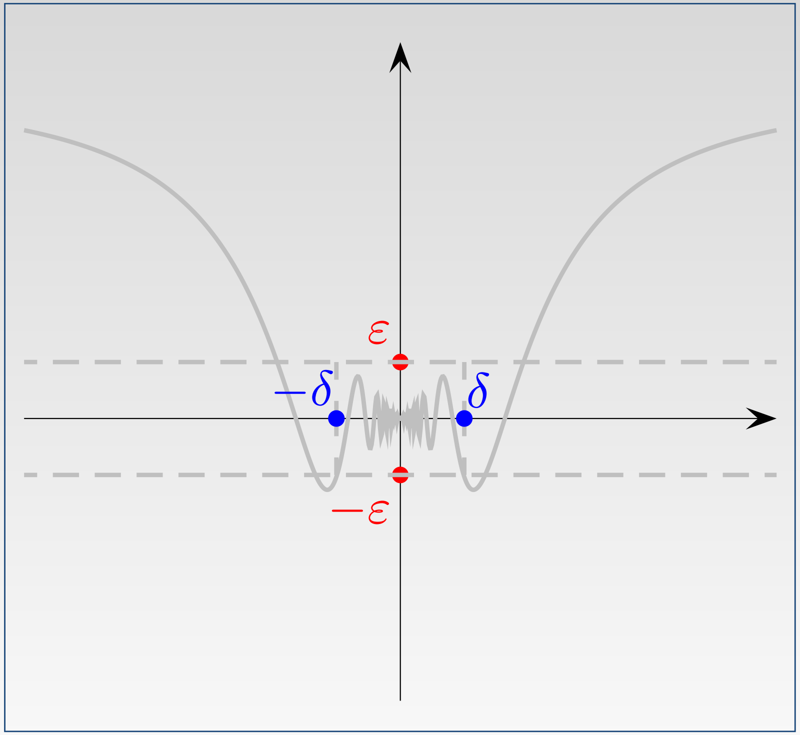
Cambiando $\varepsilon > 0$



Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Cambiando $\varepsilon > 0$ si trova un altro corrispondente δ

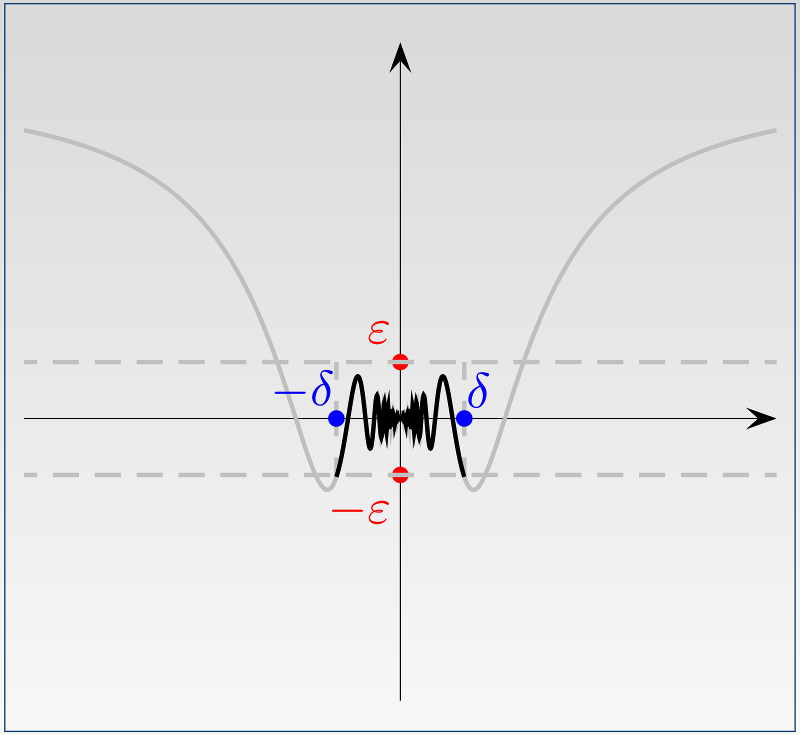


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Cambiando $\varepsilon > 0$
si trova un altro corrispondente δ
con analoghe proprietà



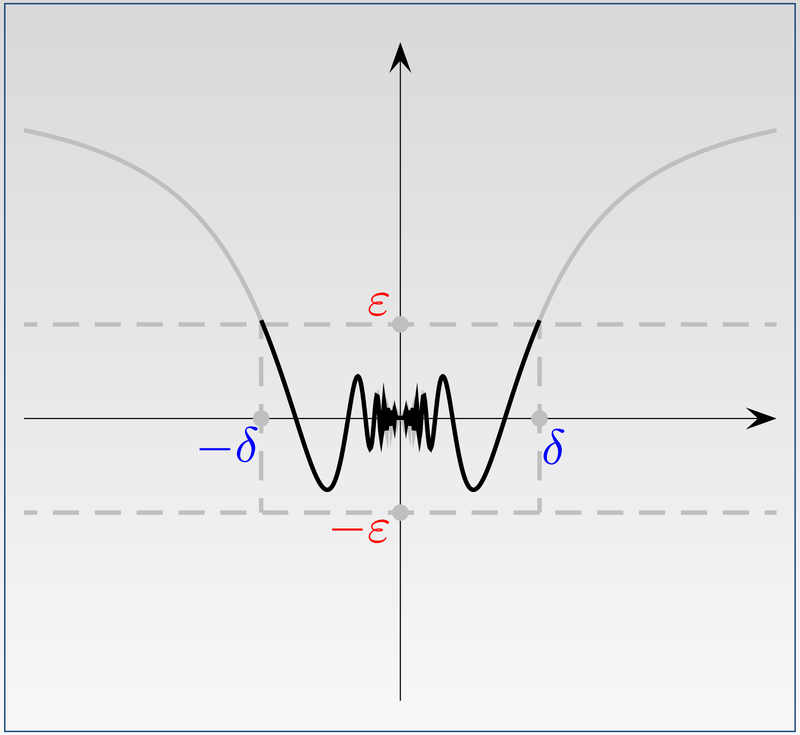
Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Questo dev'essere vero

per ogni $\varepsilon > 0$!

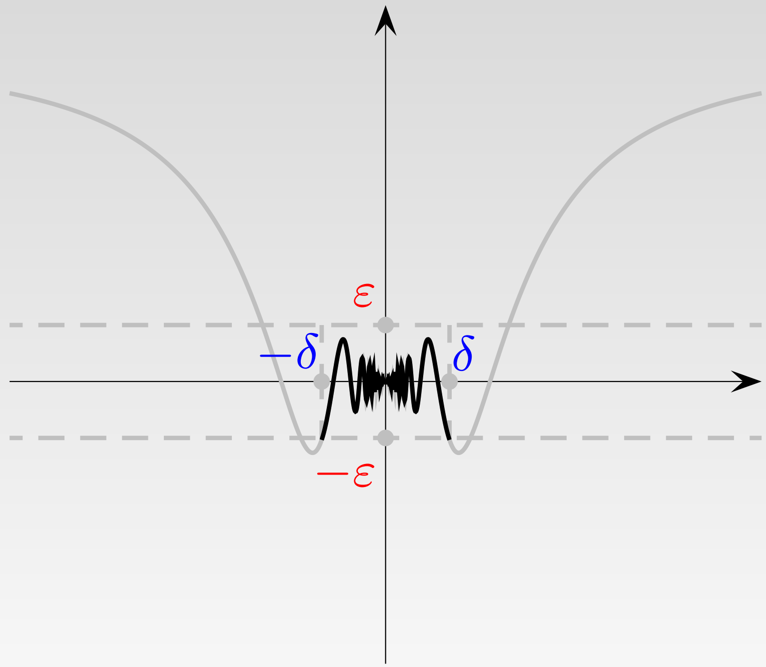


Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Questo dev'essere vero

per ogni $\varepsilon > 0$!



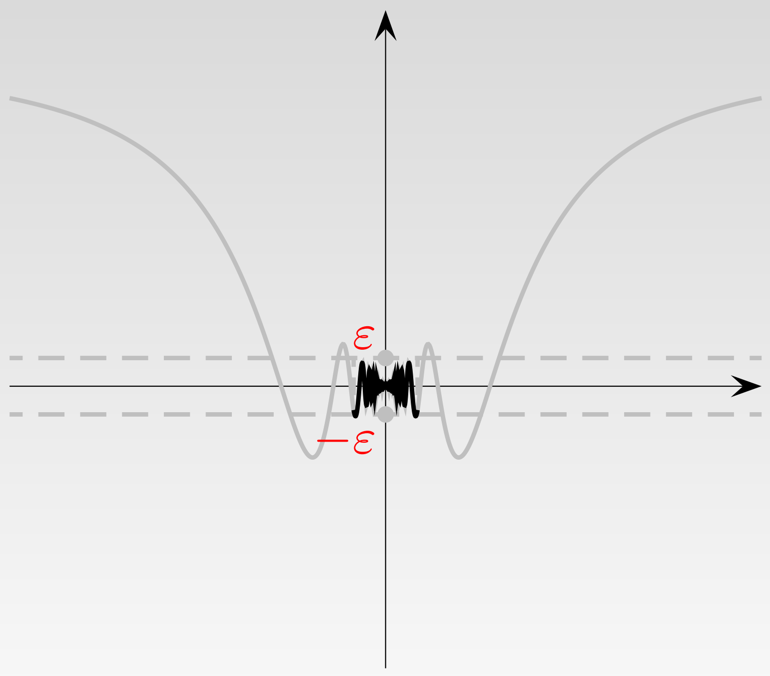
Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Questo dev'essere vero

per ogni $\varepsilon > 0$!

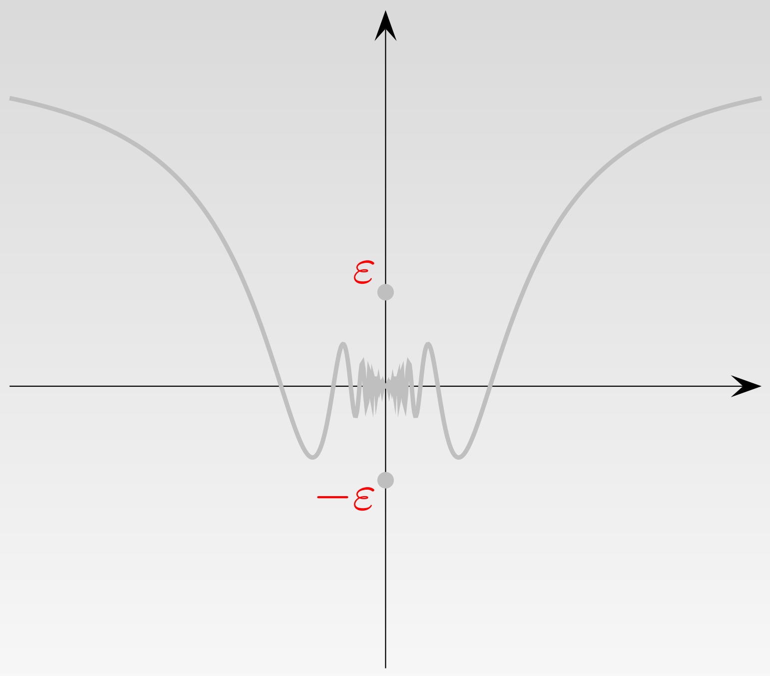


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Equivalentemente è come richiedere che, dato $\varepsilon > 0$



Esempio

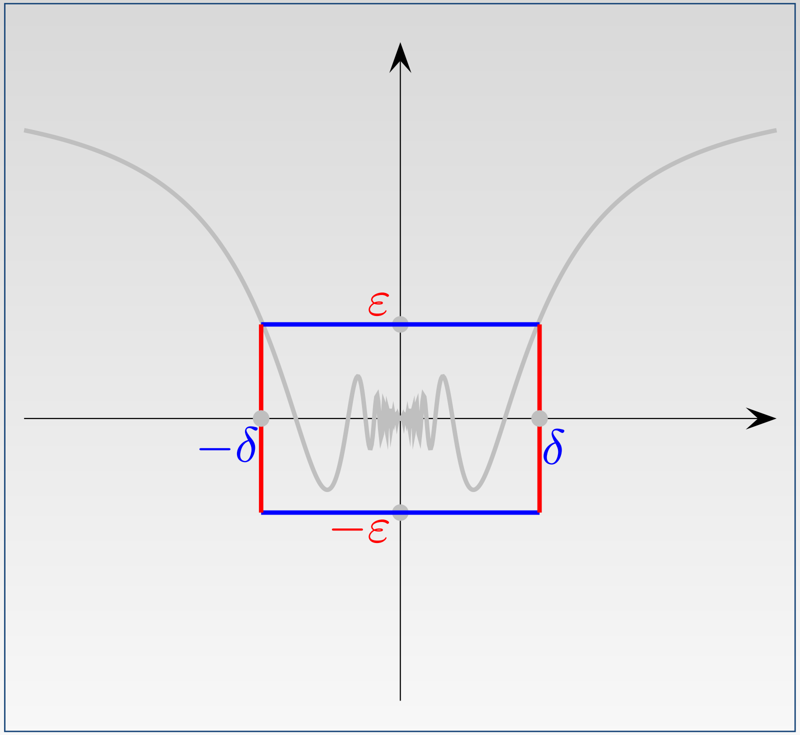
Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Equivalentemente è come richiedere che, dato

$\varepsilon > 0$

si riesce a trovare un δ

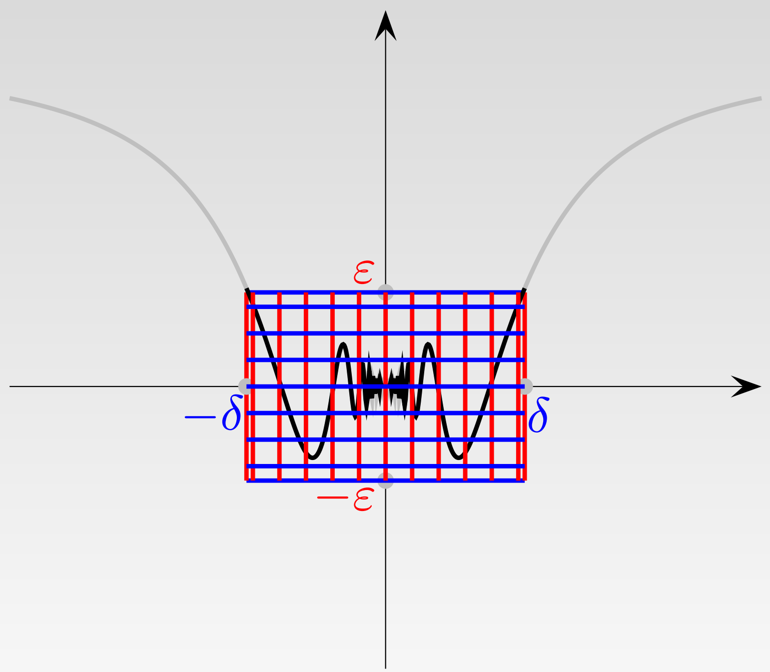


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Equivalentemente è come richiedere che, dato $\varepsilon > 0$
si riesce a trovare un δ
tale che se $-\delta < x < \delta$
il grafico della funzione stia tutto nella regione tratteggiata

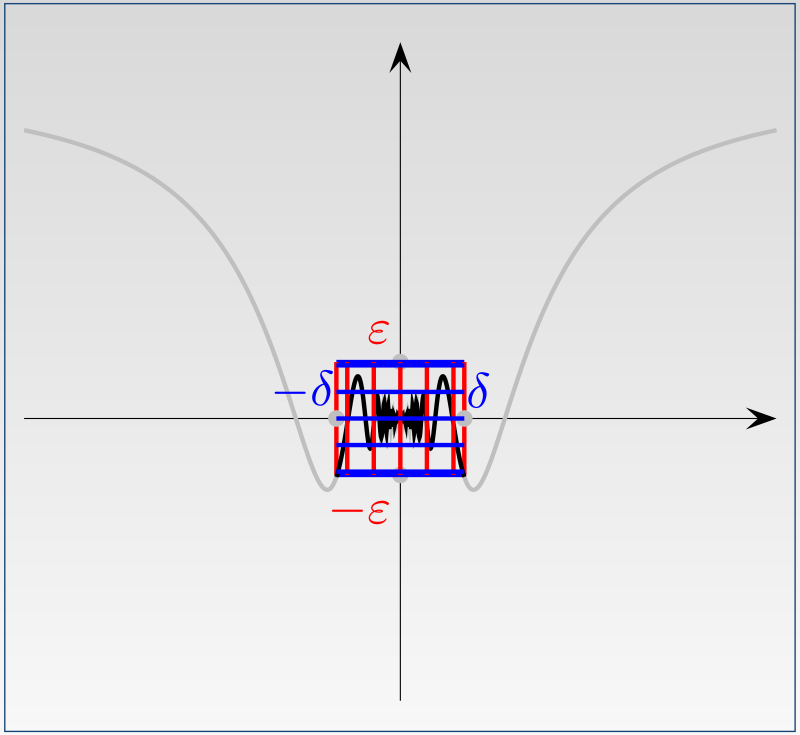


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Equivalentemente è come richiedere che, dato $\varepsilon > 0$ si riesce a trovare un δ tale che se $-\delta < x < \delta$ il grafico della funzione stia tutto nella regione tratteggiata

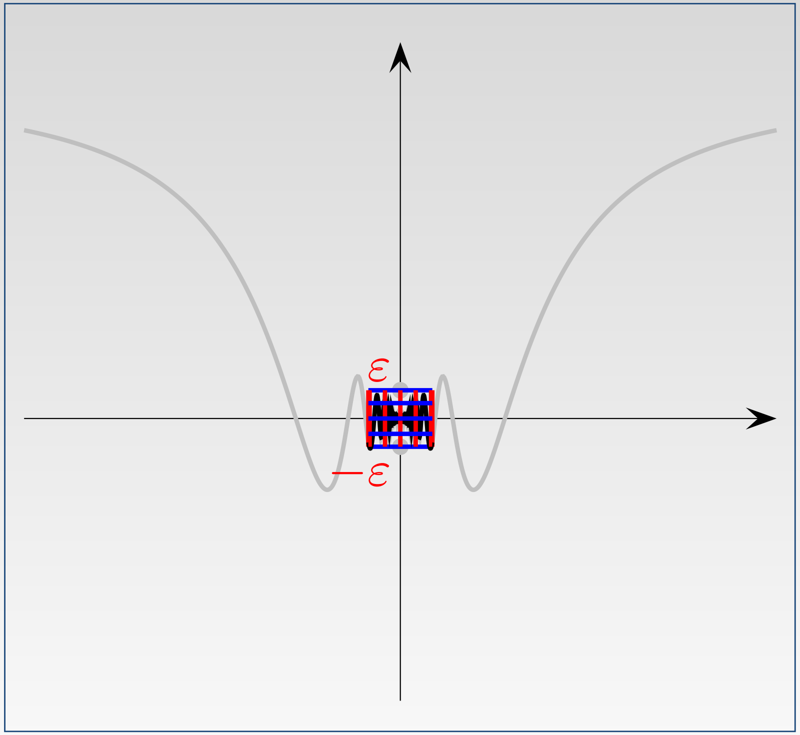


Esempio

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Equivalentemente è come richiedere che, dato $\varepsilon > 0$ si riesce a trovare un δ tale che se $-\delta < x < \delta$ il grafico della funzione stia tutto nella regione tratteggiata



Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen}\frac{1}{x} < \varepsilon$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$,

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0, \; -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \,\mathrm{sen}\, \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \,\mathrm{sen}\, \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x} \right|$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0, \ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0, \ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0, \ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad\Longrightarrow\quad -\varepsilon < x \,\mathrm{sen}\, \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \left| x \,\mathrm{sen}\, \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \,\mathrm{sen}\, \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \mathrm{sen}\, \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0, \ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando

Verifica

Verifichiamo che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0}$$

Per definizione, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, bisogna trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \neq 0,\ -\delta < x < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon < x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} < \varepsilon$$

ovvero che

$$0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

Prendendo $\delta = \varepsilon$, se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, allora

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 < \varepsilon$$

Ricapitolando. Quindi, per definizione