

Limiti di $\frac{1}{x^2}$ e di $\frac{1}{x}$

Materiale integrativo del

Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Paolo Baiti, Lorenzo Freddi

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Sia $f :]a, b[\setminus\{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice che f ha limite $+\infty$ per x tendente a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta_M > 0 : x \in]a, b[, 0 < |x - x_0| < \delta_M \implies f(x) > M$

Si dice che f ha limite $+\infty$ per x tendente a x_0 da destra e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta_M > 0 : x \in]a, b[, 0 < x - x_0 < \delta_M \implies f(x) > M$

Si dice che f ha limite $+\infty$ per x tendente a x_0 da sinistra e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta_M > 0 : x \in]a, b[, 0 < x_0 - x < \delta_M \implies f(x) > M$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Una questione di comodità...

Cosa succede alle funzioni

$$\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}$$

quando $x \rightarrow 0^\pm$?

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Una questione di comodità...

Cosa succede alle funzioni

$$\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}$$

quando $x \rightarrow 0^\pm$?

Chiaramente la stessa cosa che succede a

$$\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x-1}$$

quando $(x-1) \rightarrow 0^\pm$, cioè quando $x \rightarrow 1^\pm$.

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Una questione di comodità...

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Cosa succede alle funzioni

$$\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}$$

quando $x \rightarrow 0^\pm$?

Chiaramente la stessa cosa che succede a

$$\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x-1}$$

quando $(x-1) \rightarrow 0^\pm$, cioè quando $x \rightarrow 1^\pm$.

Per comodità di rappresentazione grafica consideriamo queste ultime.



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

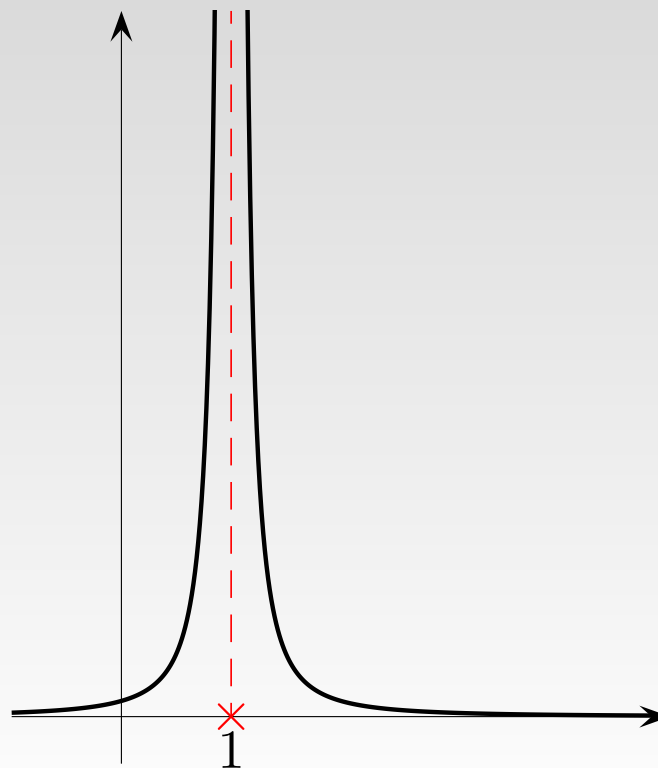
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

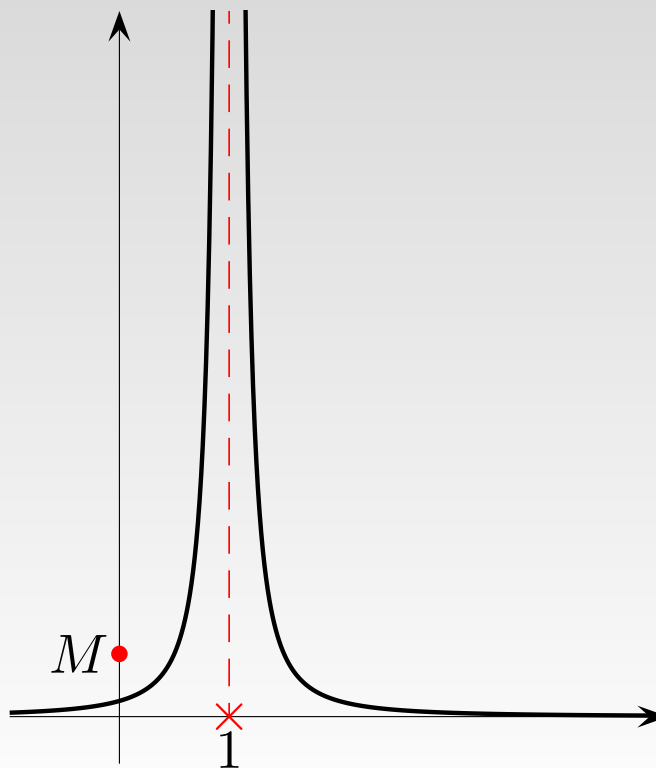


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Dato un valore M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

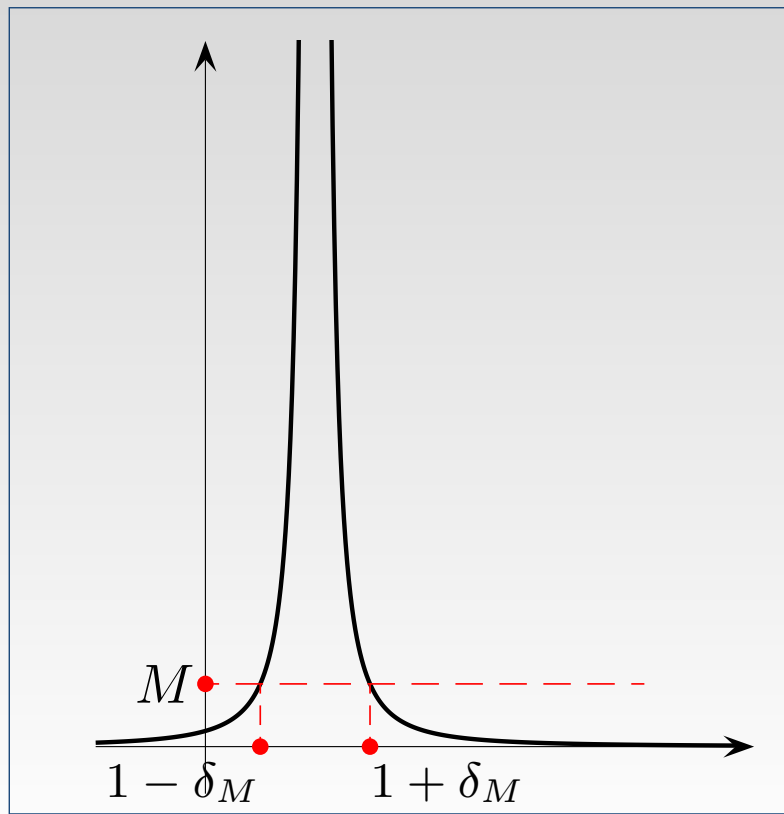


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Dato un valore M
esiste $\delta_M > 0$



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

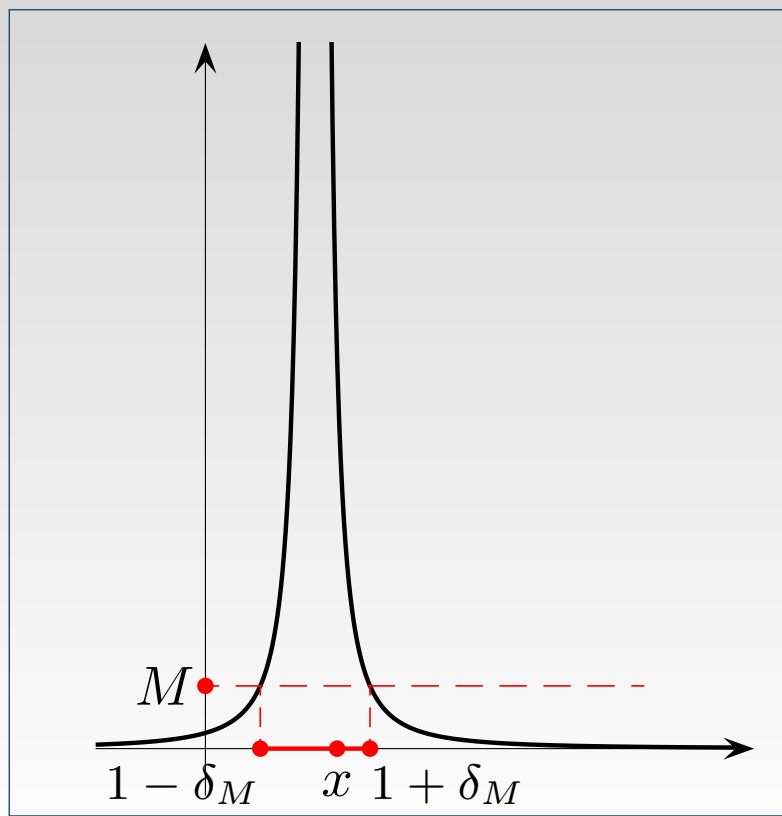
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un valore M
esiste $\delta_M > 0$
tale che tutti gli
 $0 < |x - 1| < \delta_M$



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

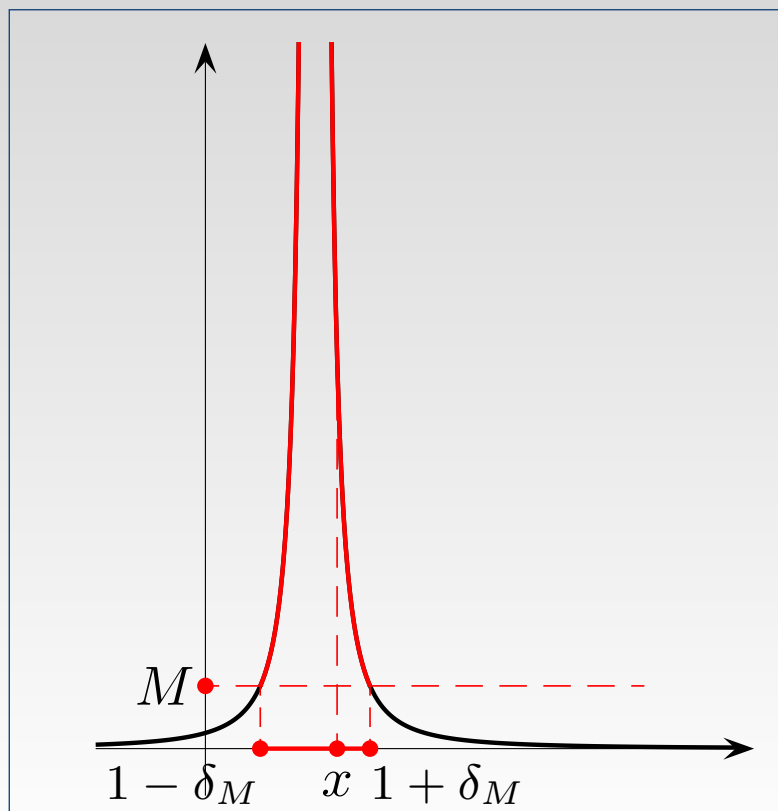
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un valore M
esiste $\delta_M > 0$
tale che tutti gli
 $0 < |x - 1| < \delta_M$
hanno valori corrispon-
denti $f(x) > M$



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

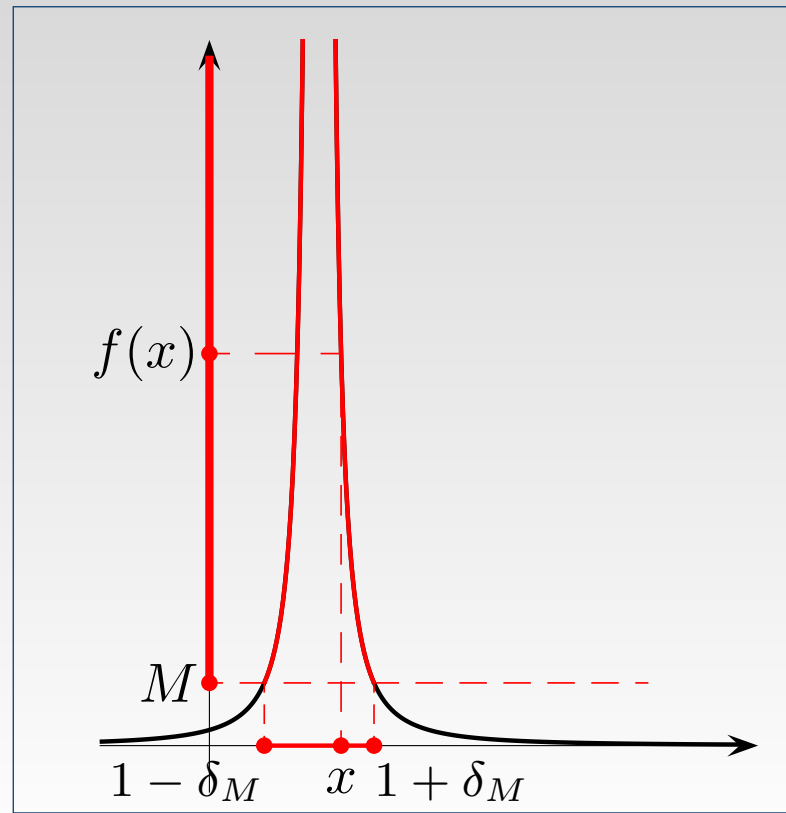
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un valore M
esiste $\delta_M > 0$
tale che tutti gli
 $0 < |x - 1| < \delta_M$
hanno valori corrispon-
denti $f(x) > M$

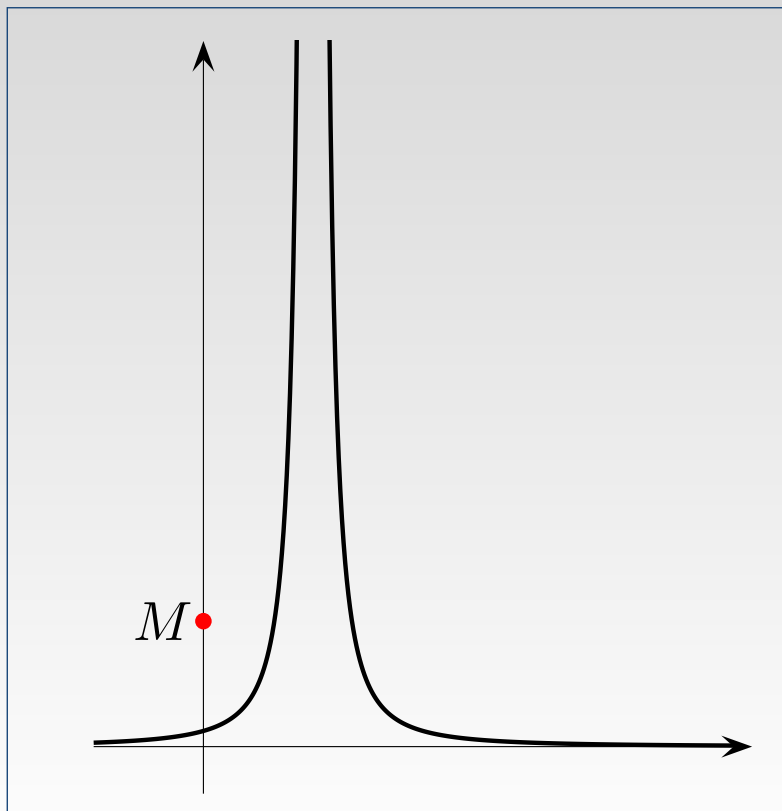


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Cambiando M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

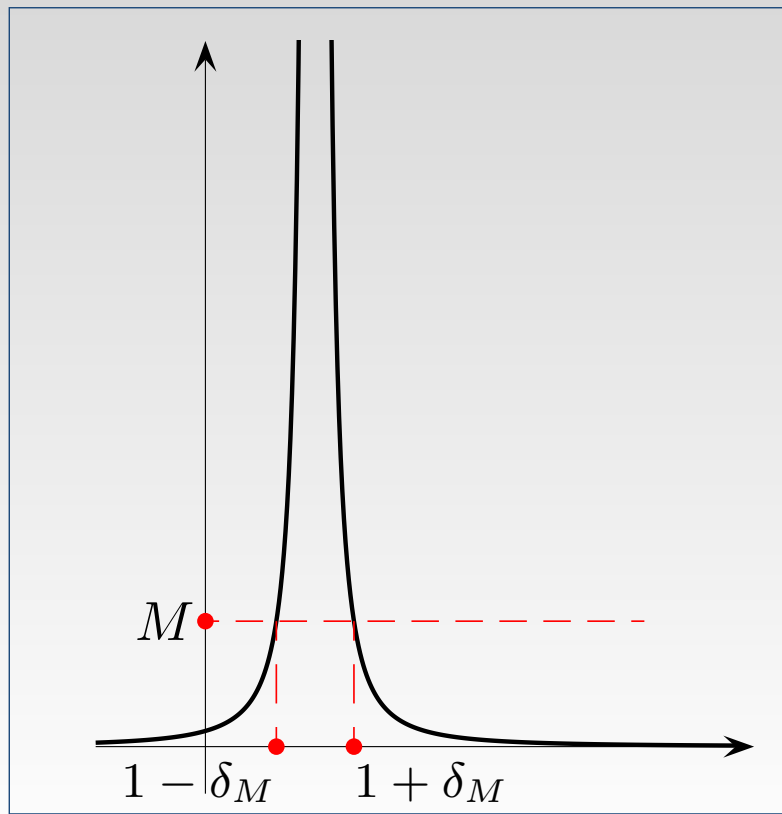


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Cambiando M
si trova un altro corri-
spondente δ_M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

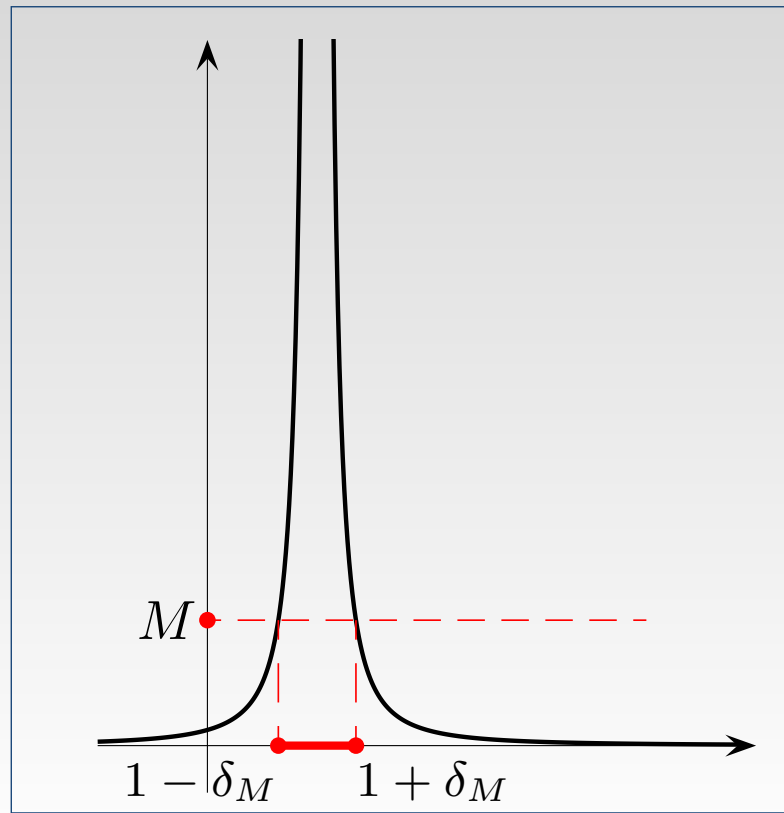


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Cambiando M
si trova un altro corri-
spondente δ_M
con analoghe proprietà



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

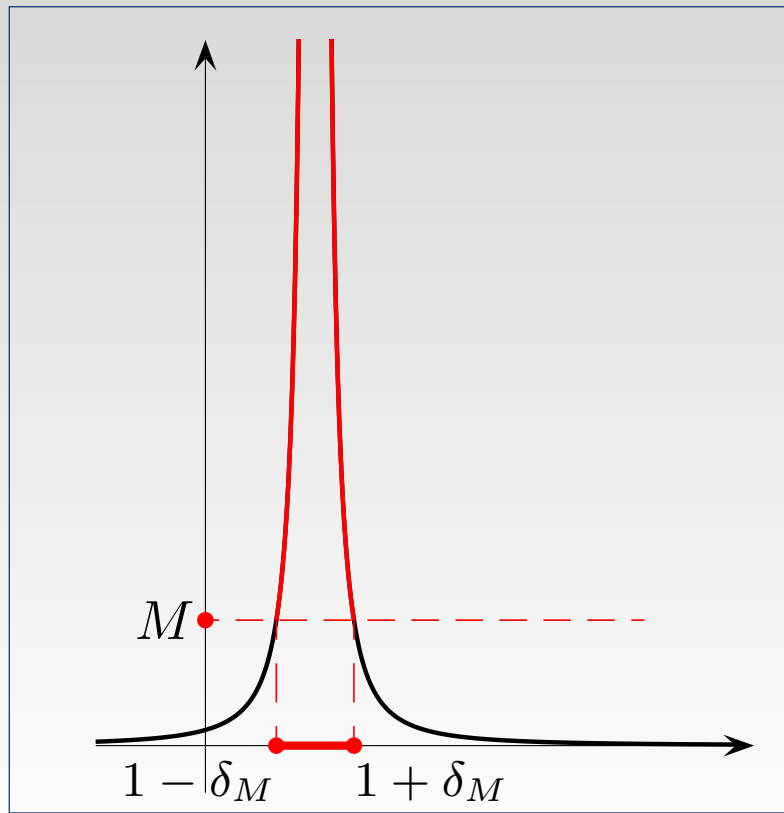
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Cambiando M
si trova un altro corri-
spondente δ_M
con analoghe proprietà

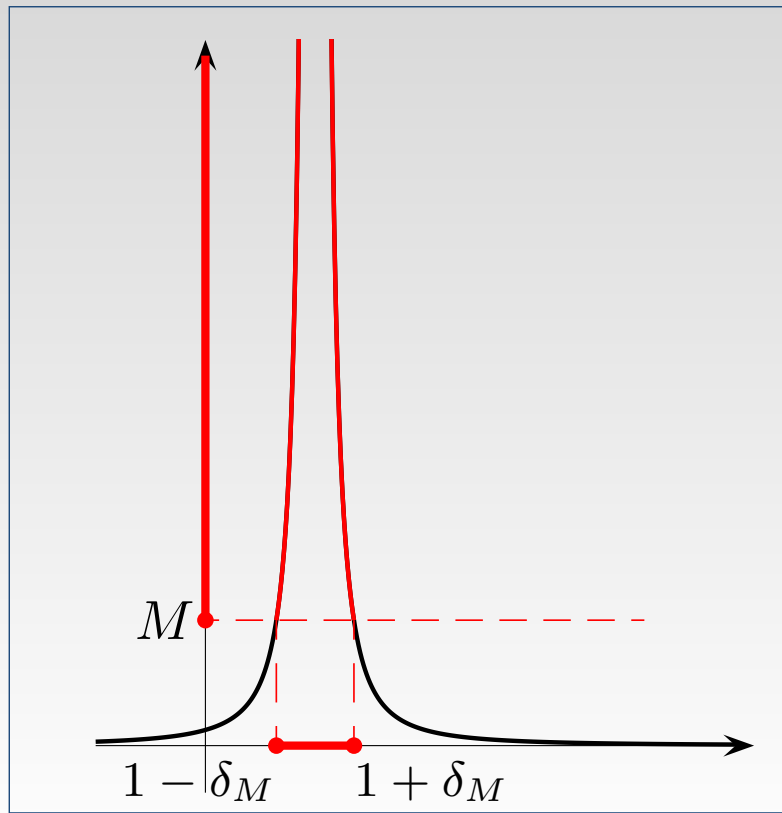


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Cambiando M
si trova un altro corri-
spondente δ_M
con analoghe proprietà



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

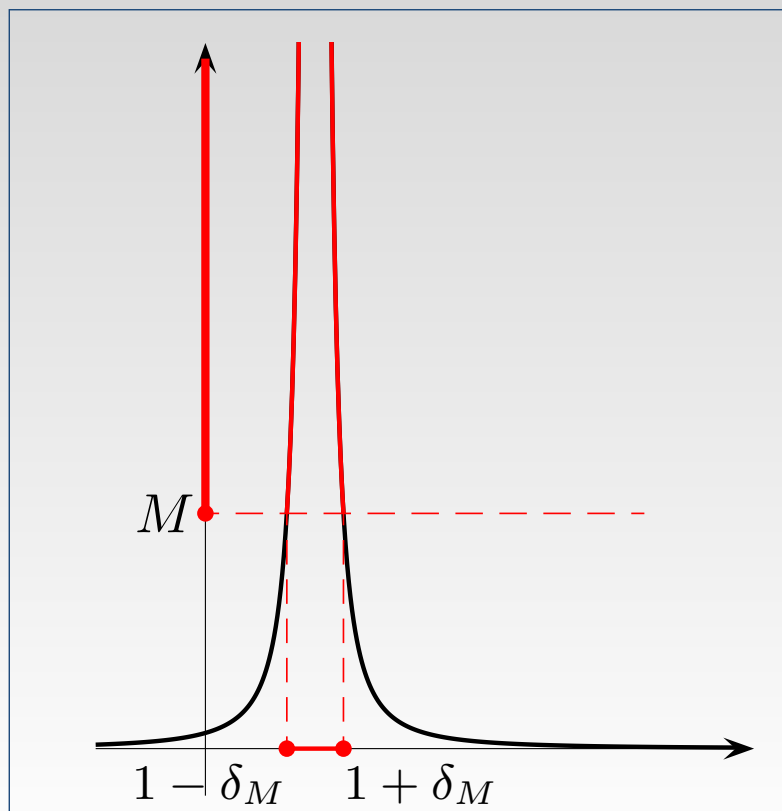


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Questo dev'essere vero
per ogni M !



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

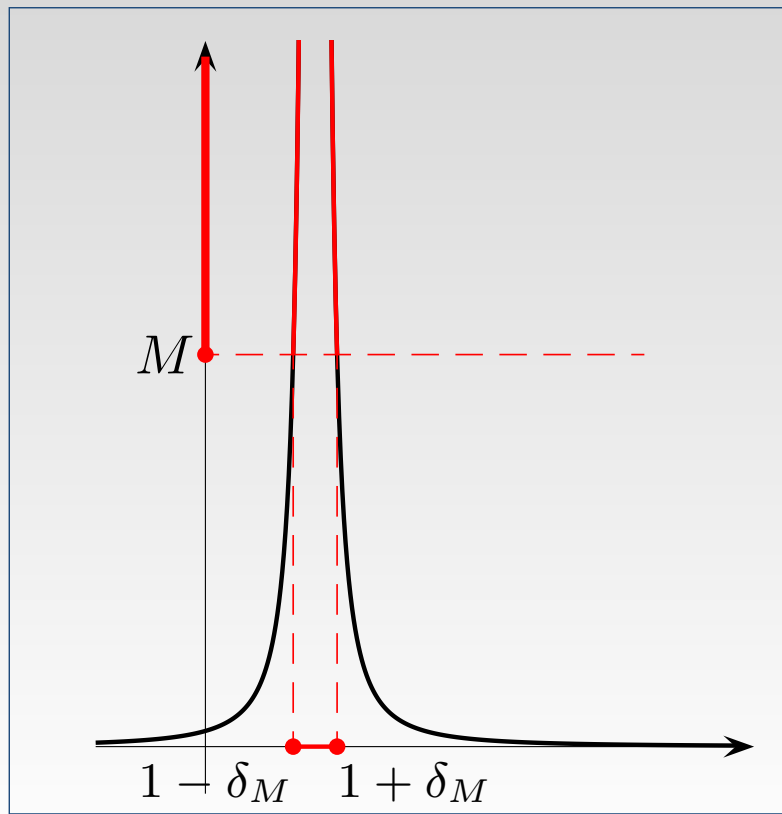


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Questo dev'essere vero
per ogni M !



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

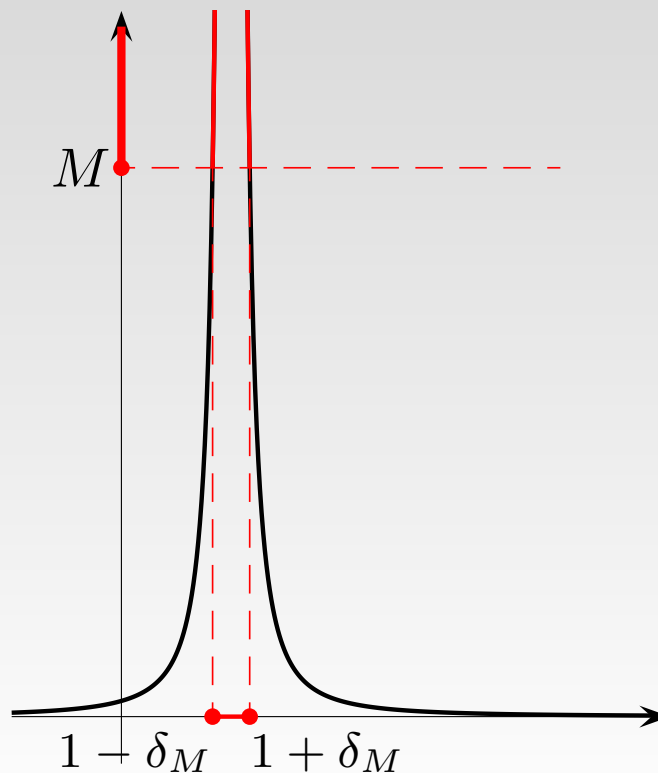


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Questo dev'essere vero
per ogni M !



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

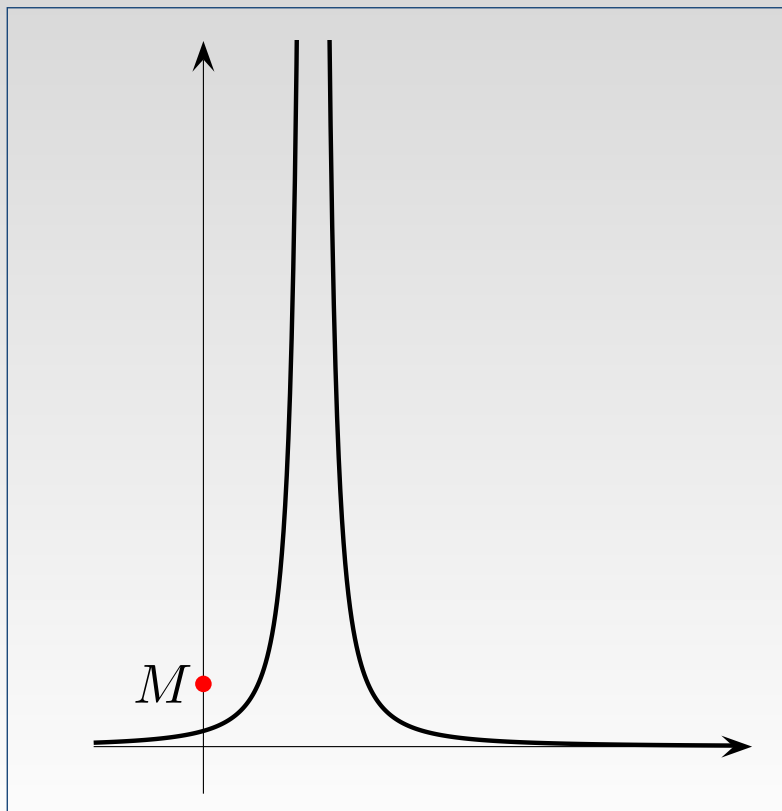


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Equivalentemente è come chiedere che, dato M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

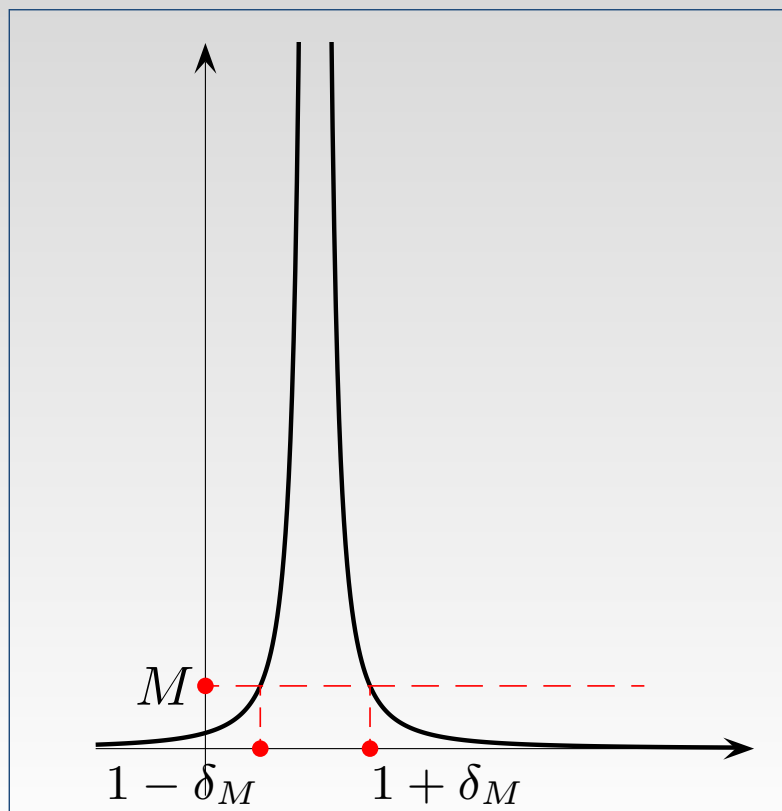


Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

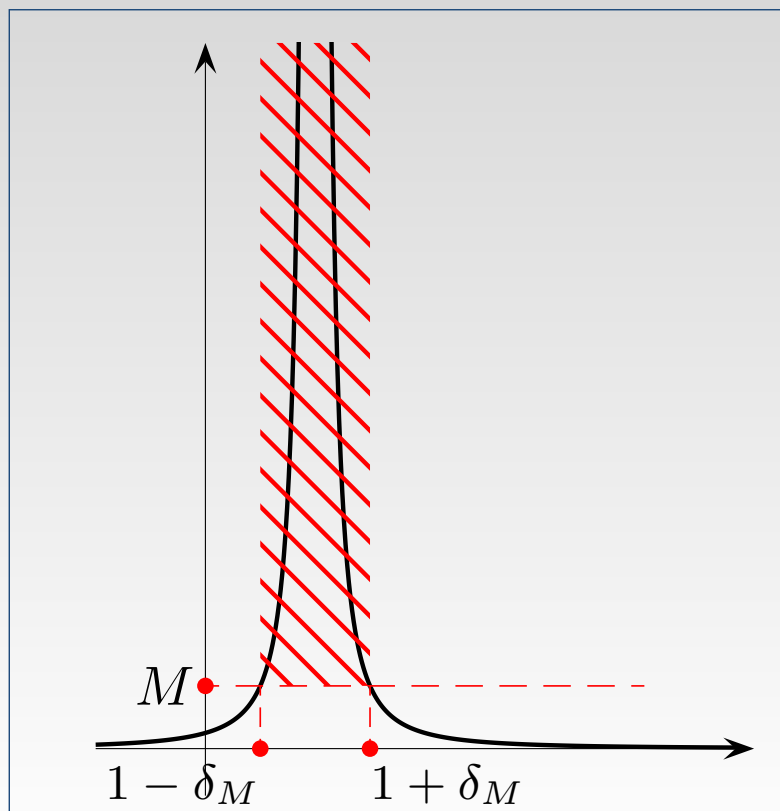
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M tale che il grafico, per $0 < |x - 1| < \delta_M$, stia tutto nella striscia tratteggiata



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

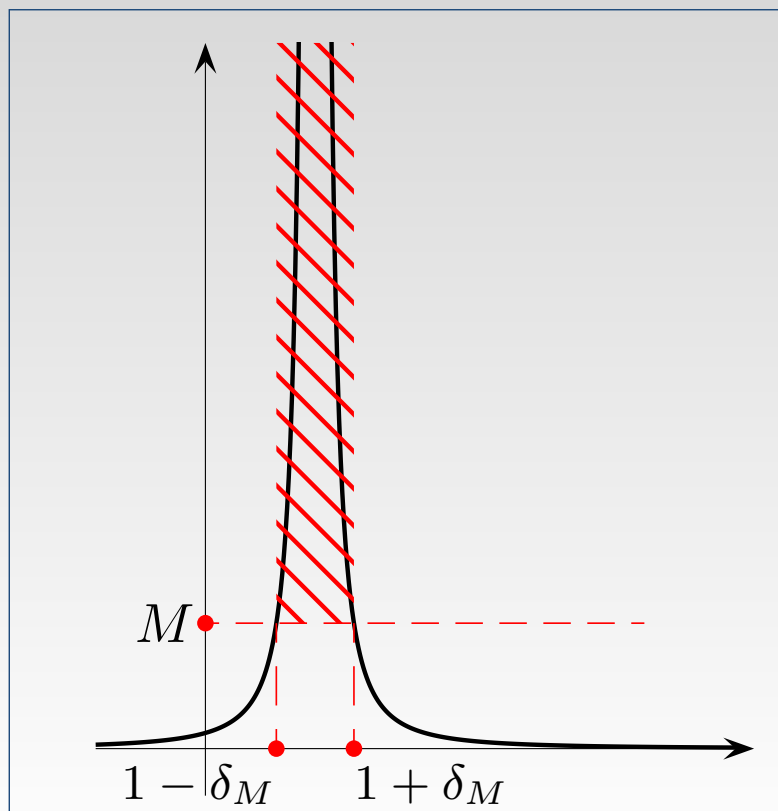
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M tale che il grafico, per $0 < |x - 1| < \delta_M$, stia tutto nella striscia tratteggiata



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

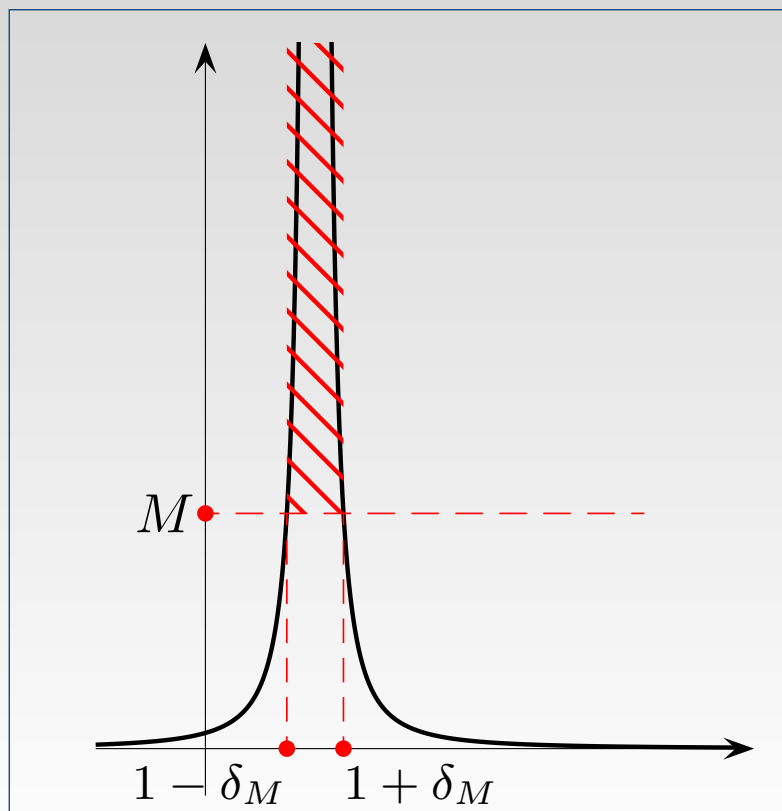
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M tale che il grafico, per $0 < |x - 1| < \delta_M$, stia tutto nella striscia tratteggiata



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

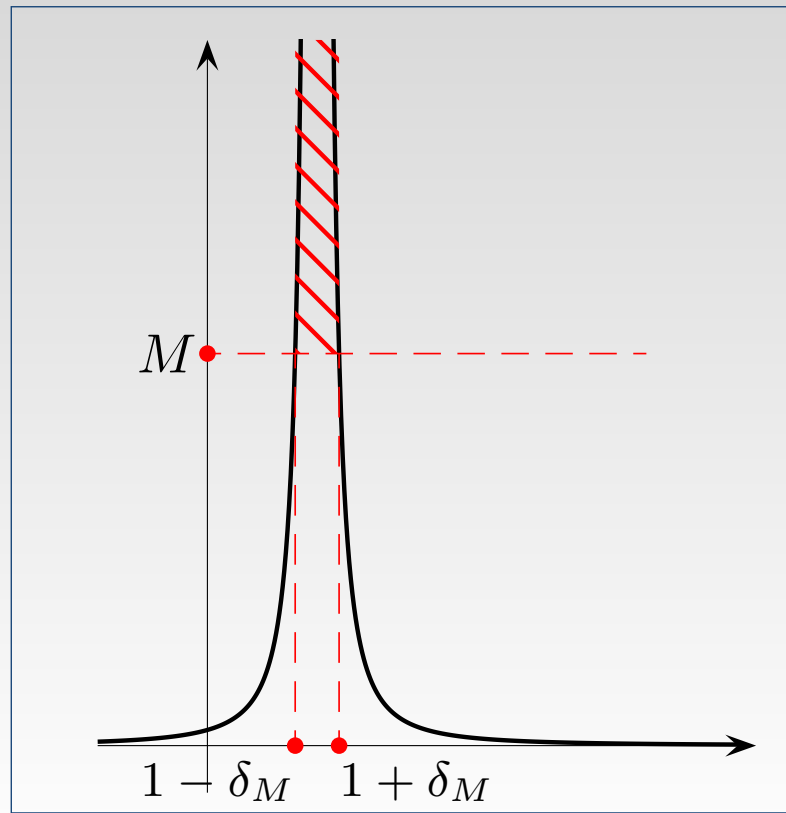
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M tale che il grafico, per $0 < |x - 1| < \delta_M$, stia tutto nella striscia tratteggiata



Esempio 1

Illustriamo la definizione col seguente esempio

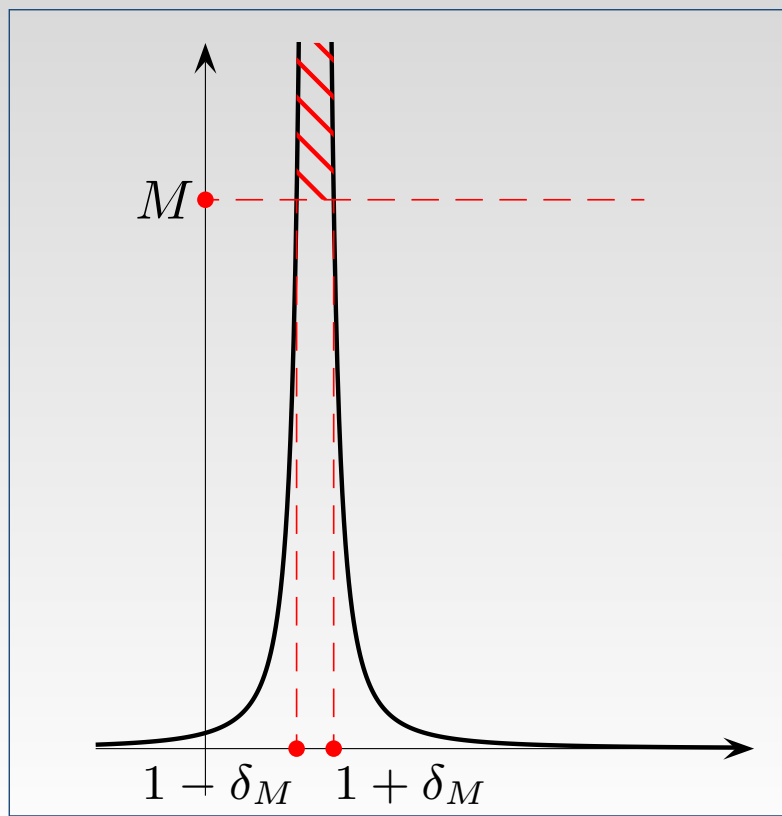
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$
Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Equivalentemente è come chiedere che, dato M si riesce a trovare un δ_M tale che il grafico, per $0 < |x - 1| < \delta_M$, stia tutto nella striscia tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

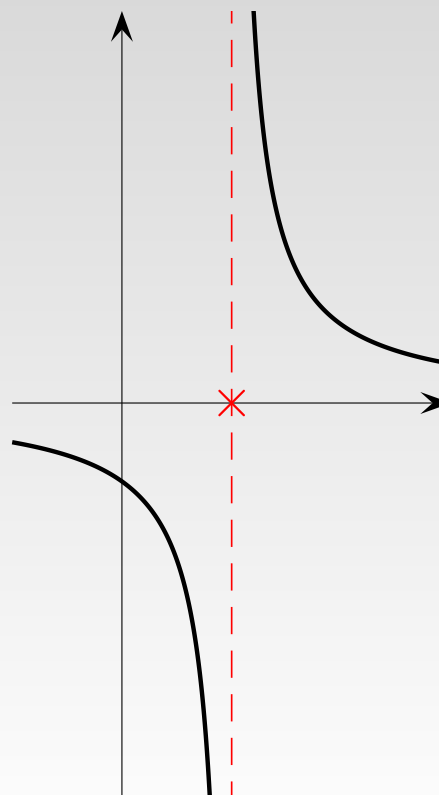
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

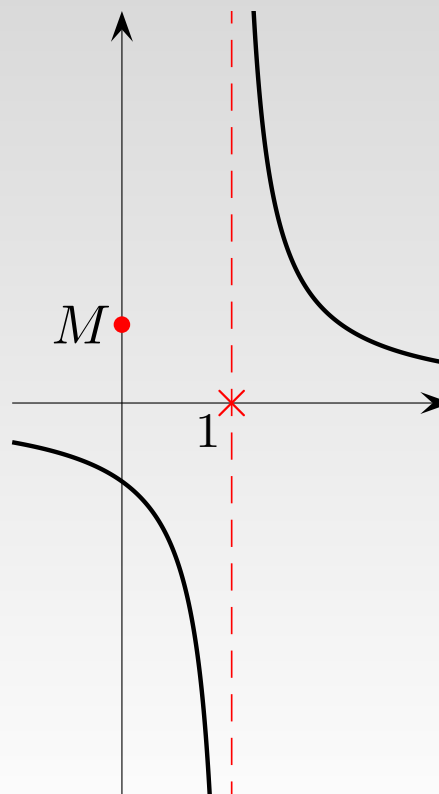
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M



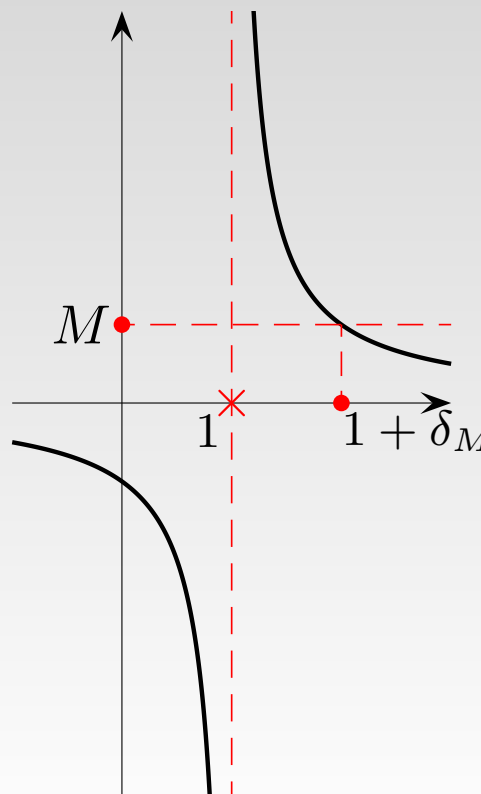
Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M



Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

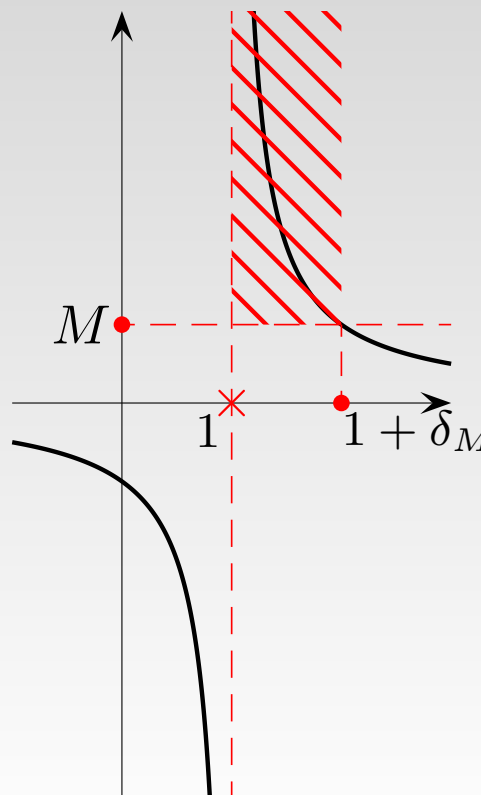
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 < x < 1 + \delta_M$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

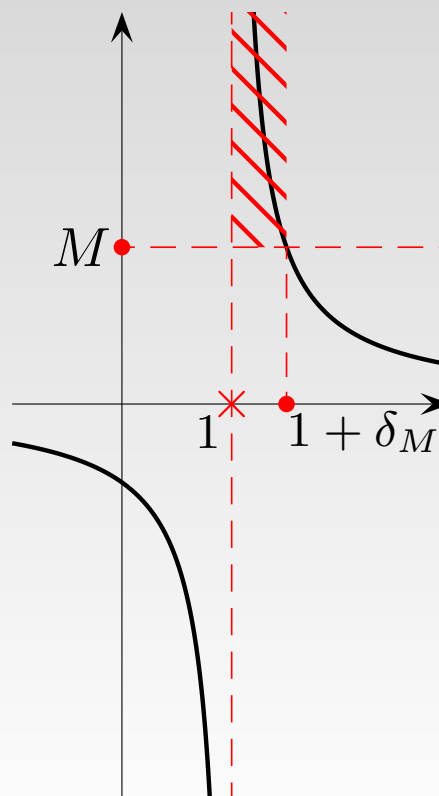
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 < x < 1 + \delta_M$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

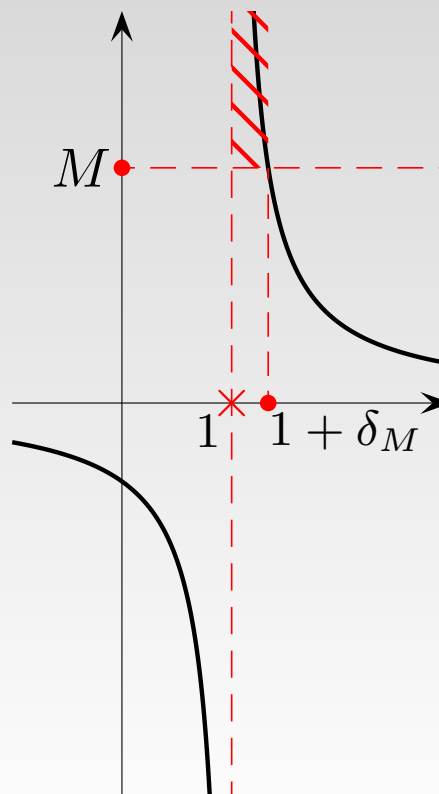
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^{\pm}$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 < x < 1 + \delta_M$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

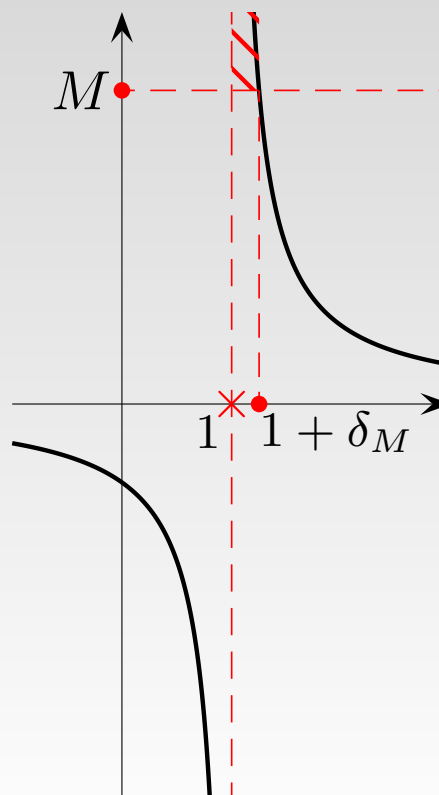
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 < x < 1 + \delta_M$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

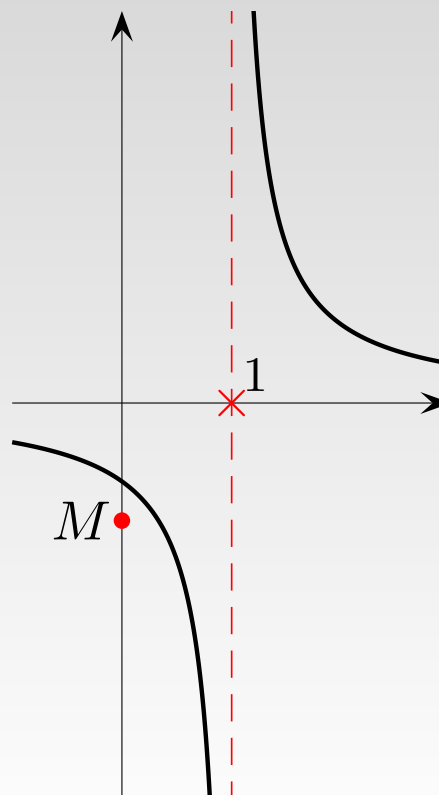
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

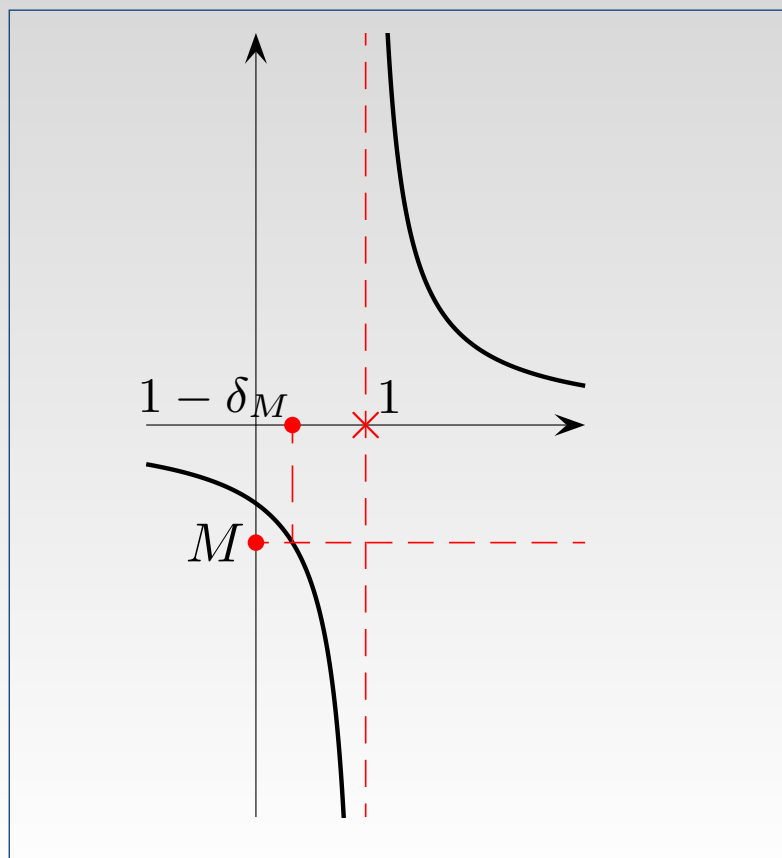
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

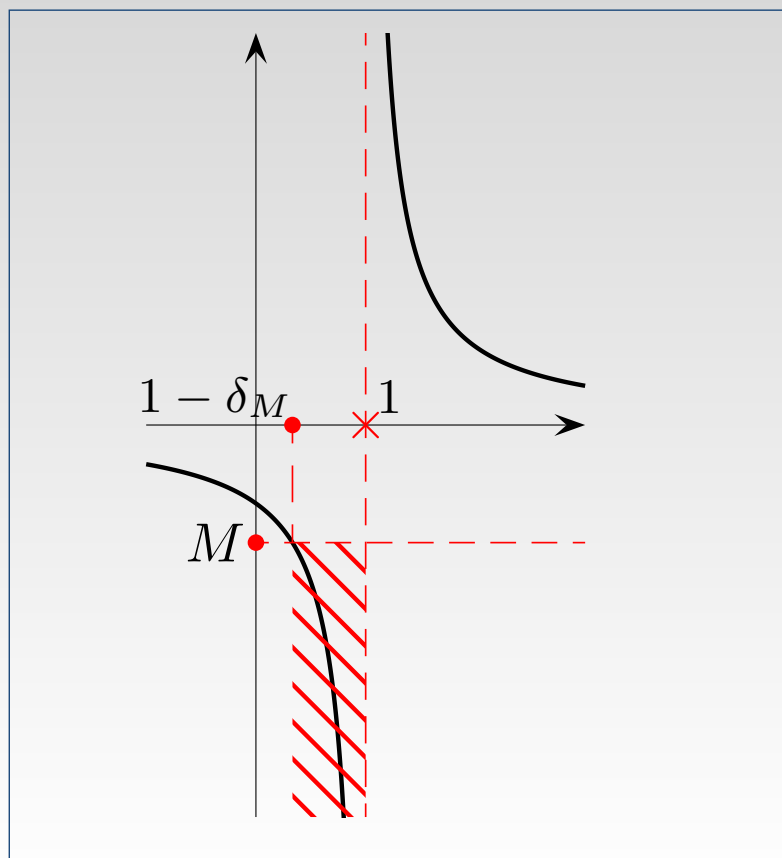
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

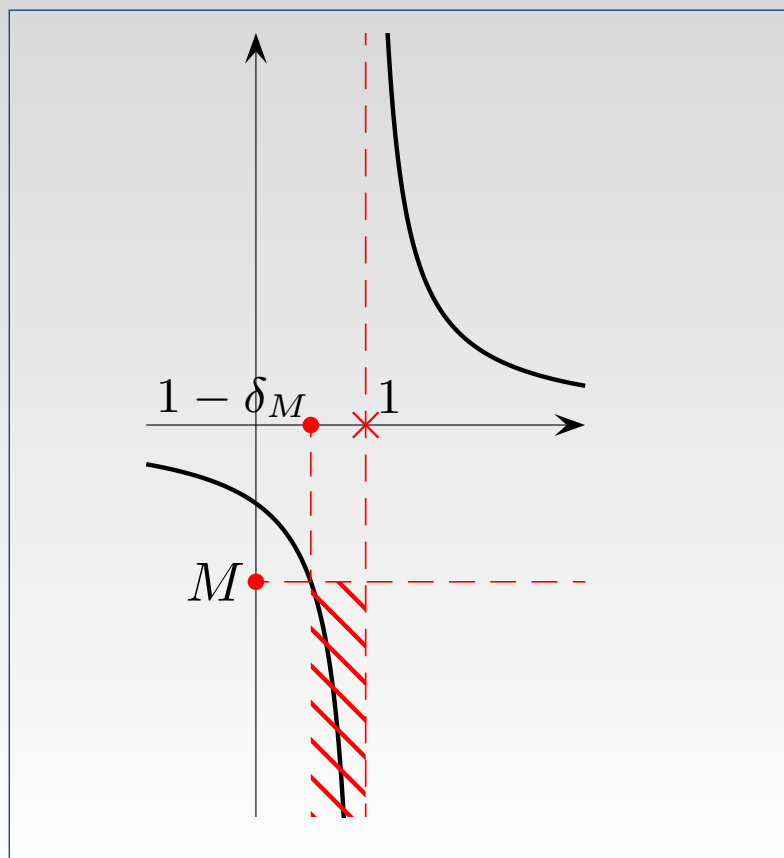
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

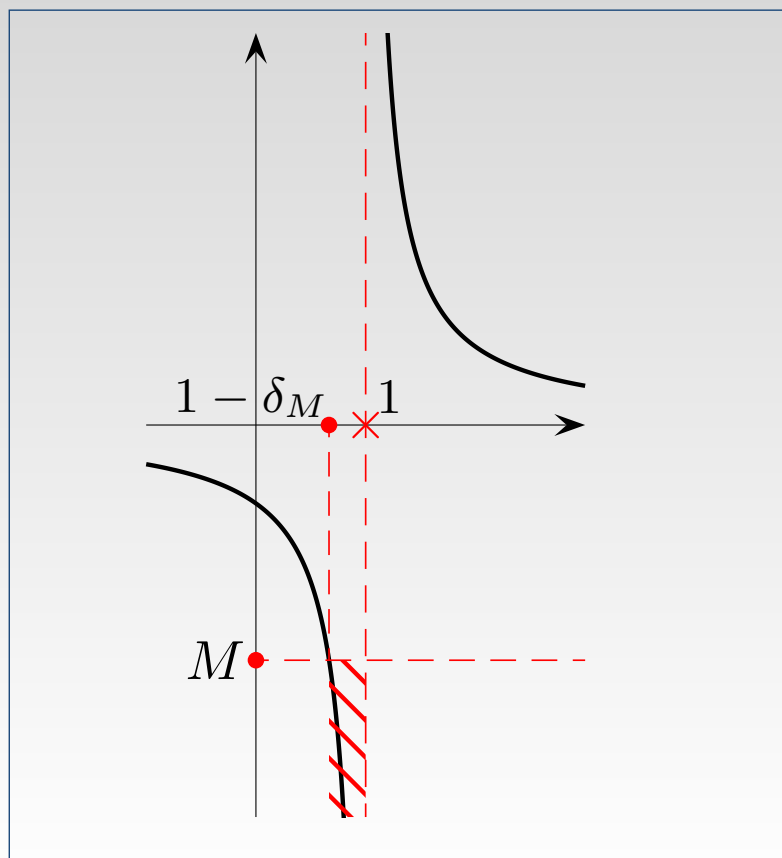
Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
sia tutto nella striscia
tratteggiata



Esempio 2

Illustriamo le definizioni con i seguenti esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Limite $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^\pm$

Una questione di comodità...

Esempio 1

Esempio 2

Dato un arbitrario M
si riesce a trovare un δ_M
tale che il grafico,
per $1 - \delta_M < x < 1$,
stia tutto nella striscia
tratteggiata

