Assioma di completezza

Materiale integrativo del

Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Paolo Baiti, Lorenzo Freddi

Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Assioma di completezza

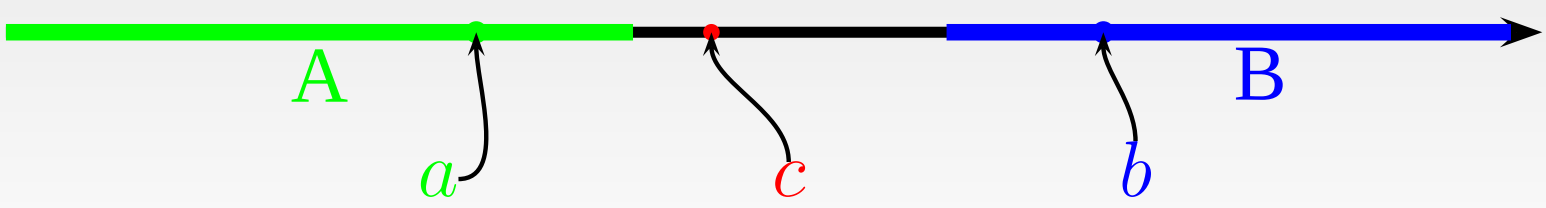
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.



Assioma di completezza

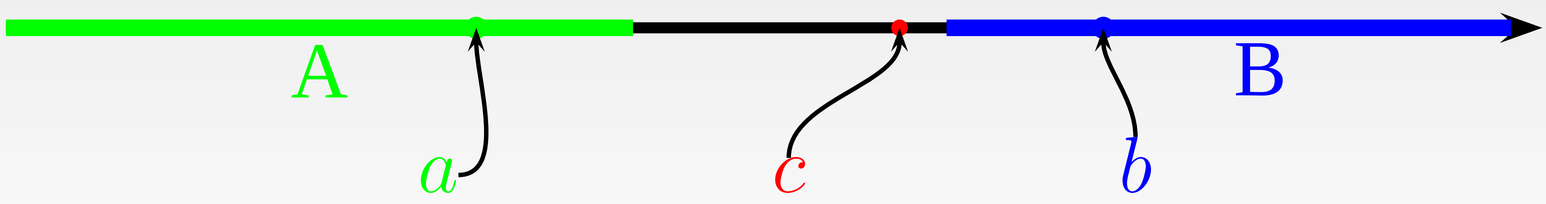
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.



anche altre scelte di c vanno bene...

Assioma di completezza

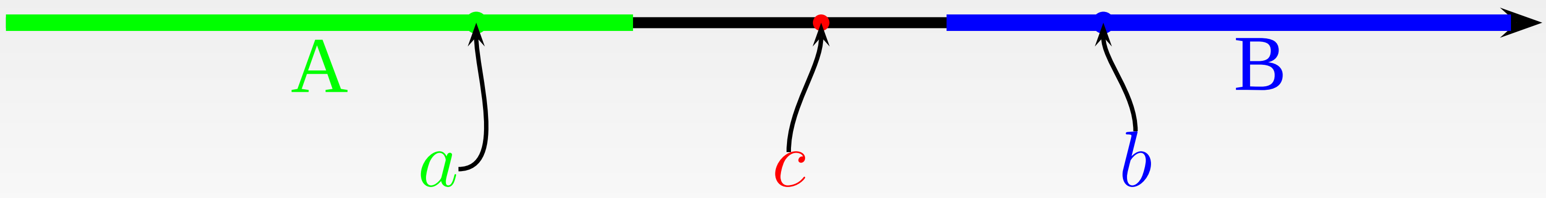
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.



anche altre scelte di c vanno bene...

Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Se $A \cup B = \mathbb{R}$, l'elemento separatore è unico

Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

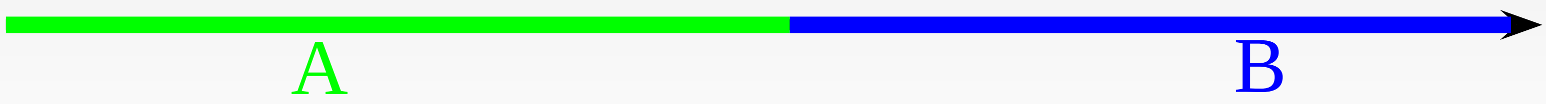
$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Se $A \cup B = \mathbb{R}$, l'elemento separatore è unico



Assioma di completezza

Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ tali che

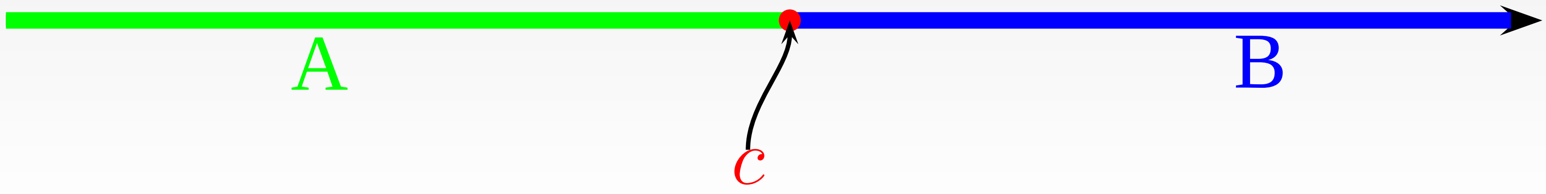
$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c si chiama elemento separatore degli insiemi A e B.

Se $A \cup B = \mathbb{R}$, l'elemento separatore è unico



Esistenza di $\mathbb{R}$

Teorema. *Esiste un insieme* $\mathbb{R}$ *che verifica gli Assiomi di corpo commutativo, di ordinamento e di completezza*

$\mathbb{Q}$ non è $\mathbb{R}$...

$\mathbb{Q}$ **non è** $\mathbb{R}$**. . .**

. . . perché, pur verificando gli assiomi di corpo commutativo e di ordinamento, <u>non</u> verifica quello di completezza.

$\mathbb{Q}$ non è $\mathbb{R}$…

…perché, pur verificando gli assiomi di corpo commutativo e di ordinamento, <u>non</u> verifica quello di completezza. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0,\ x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0,\ x^2 \geq 2\}$$

$\mathbb{Q}$ non è $\mathbb{R}$...

...perché, pur verificando gli assiomi di corpo commutativo e di ordinamento, <u>non</u> verifica quello di completezza. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0,\ x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0,\ x^2 \geq 2\}$$

$$A \cap B = \varnothing,\ A \cup B = \mathbb{Q}$$

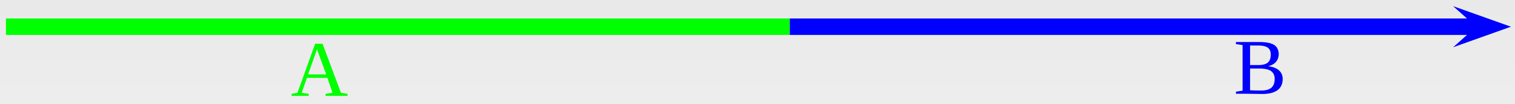
$\mathbb{Q}$ non è $\mathbb{R}$...

...perché, pur verificando gli assiomi di corpo commutativo e di ordinamento, <u>non</u> verifica quello di completezza. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x > 0, \; x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x \geq 0, \; x^2 \geq 2\}$$

$$A \cap B = \varnothing, \; A \cup B = \mathbb{Q}$$



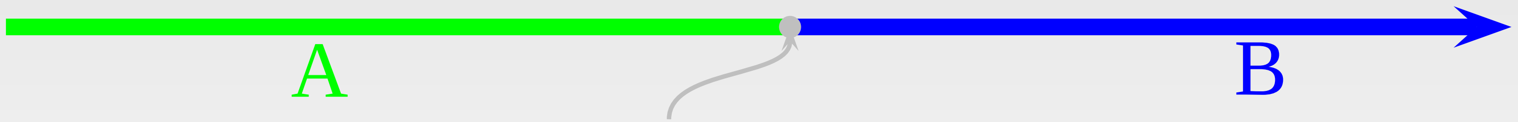
$\mathbb{Q}$ non è $\mathbb{R}$...

...perché, pur verificando gli assiomi di corpo commutativo e di ordinamento, non verifica quello di completezza. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x > 0, \ x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x \geq 0, \ x^2 \geq 2\}$$

$$A \cap B = \varnothing, \ A \cup B = \mathbb{Q}$$



il punto separatore $\sqrt{2}$ non appartiene a $\mathbb{Q}$!!

Quindi $\boxed{\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}}$