Proviamo che, come accadeva per le successioni, si ha

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1; \end{cases}$

2. $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \text{ per ogni } p \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1;}$ *3.* $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}}$

Dato $x \in \mathbb{R}$ si chiama *parte intera* di x il numero

$$[x] := \min\{z \in \mathbb{Z} \ : \ z \geq x\}.$$

1. Cominciamo col considerare il caso in cui $a > 1$. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

allora, per la monotonia dell'esponenziale, si ottiene

$$a^{[x]} \leq a^x \leq a^{[x]+1}.$$

D'altra parte si sa che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = +\infty$$

e col cambiamento di variabile $n = [x]$ si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} a^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} a^{[x]+1} = 0.$$

e e la tesi segue dal teorema dei carabinieri.

Il caso $a = 1$ è banale, mentre quello in cui $0 < a < 1$ si ottiene dal precedente chiamando $b := 1/a$ e osservando che $b > 1$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^x} = 0.$$

2. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

allora, per la monotonia della potenza e dell'esponenziale, si ottiene

$$\frac{[x]^p}{a^{[x]+1}} \leq \frac{x^p}{a^x} \leq \frac{([x]+1)^p}{a^{[x]}}.$$

D'altra parte si sa che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{a^n} = 0$$

e col cambiamento di variabile $n = [x]$ si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]^p}{a^{[x]+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{([x]+1)^p}{a^{[x]}} = 0.$$

L'altro limite si calcola analogamente e la tesi segue dal teorema dei carabinieri.

3. Per il calcolo del limite *3.* utilizziamo un procedimento analogo al precedente. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

da cui, per ogni $x > 0$

$$\frac{1}{[x]+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$$

e quindi, per la monotonia dell'esponenziale, si ottiene

$$\left(\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

per ogni $x > 0$. D'altra parte si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

e col cambiamento di variabile $n = [x]$ si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \mathrm{e}\,.$$

L'altro limite si calcola analogamente e la tesi segue dal teorema dei carabinieri.