24. Equazioni differenziali di ordine 1: esercizi

Esercizio 24.19. *Verificare che ciascuna delle seguenti funzioni è una soluzione sull'intervallo I dell'equazione differenziale a fianco specificati*

1. $y(t) = t + \log(t-1), \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^y}, \qquad I =]1, +\infty[;$

2. $y(t) = \sqrt{t^2 - 3}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2+3}{ty}, \qquad I =]\sqrt{3}, +\infty[;$

3. $y(t) = \sqrt[3]{t^2+1}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t(y^3+1)}{3y^2(t^2+2)}, \qquad I = \mathbb{R};$

4. $y(t) = \sqrt[3]{3t - 3t^3}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1-3t^2}{y^2}, \qquad I = \mathbb{R};$

5. $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = ty^3, \qquad I =]-1, 1[;$

6. $y(t) = t\sqrt{2\log t}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + \dfrac{t}{y}, \qquad I =]1, +\infty[;$

7. $y(t) = \dfrac{1-t}{1+t}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2-1}{2t}, \qquad I =]1, +\infty[;$

8. $y(t) = \dfrac{t^2}{1-t^2}, \qquad y' = \dfrac{2y(y+1)}{t}, \qquad I =]0, 1[;$

9. $y(t) = \operatorname{sen}(\log t - \pi/2), \qquad y' = \dfrac{t\sqrt{1-y^2}}{t^2+1}, \qquad I =]1, \mathrm{e}[;$

10. $y(t) = (2 + \sqrt{t-1})^2, \qquad y' = \sqrt{\dfrac{y}{t-1}}, \qquad I =]1, +\infty[;$

11. $y(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $\quad y' = \dfrac{1-y^2}{t}$, $\quad I =]1, +\infty[$;

12. $y(t) = \sqrt{3t^2+1}$, $\quad y' = \dfrac{y^2-1}{ty}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

13. $y(t) = (1+\ln(t+2))^2$, $\quad y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{t+2}$, $\quad I =]0, +\infty[$;

14. $y(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}}$, $\quad y' = \dfrac{3ty}{\ln y}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

15. $y(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2}$, $\quad y' = \dfrac{ty(1-y)}{t^2+1}$, $\quad I =]0, +\infty[$;

16. $y(t) = \sqrt{\operatorname{sen} t + 2}$, $\quad y' = \dfrac{(y^2-2)\cos t}{2y \operatorname{sen} t}$, $\quad I =]0, \pi[$.

$\boxed{R}$ *1.* La funzione $y(t)$ è definita e derivabile per $t > 1$ ed è ivi una soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = t\,\mathrm{e}^t \,/\, \mathrm{e}^{y(t)}$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d\big(t + \log(t-1)\big)}{dt} = 1 + \frac{1}{t-1} = \frac{t}{t-1}.$$

$$\frac{t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{y(t)}} = \frac{t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{t+\log(t-1)}} = \frac{t\,\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{\log(t-1)}} = \frac{t}{t-1},$$

per ogni $t > 1$ e dunque y è soluzione.

2. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile per $t > \sqrt{3}$ ed è ivi una soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = (y^2(t)+3)/(t\,y(t))$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d\sqrt{t^2-3}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t^2-3}}2t = \frac{t}{\sqrt{t^2-3}},$$

$$\frac{y^2(t)+3}{t\,y(t)} = \frac{(\sqrt{t^2-3})^2+3}{t\sqrt{t^2-3}} = \frac{(t^2-3)+3}{t\sqrt{t^2-3}} = \frac{t}{\sqrt{t^2-3}},$$

per ogni $t > \sqrt{3}$ e dunque y è soluzione.

3. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile per ogni t ed è ivi una soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = 2t(y^3(t)+1)/(3y^2(t)(t^2+2))$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d\sqrt[3]{t^2+1}}{dt} = \frac{d(t^2+1)^{1/3}}{dt} = \frac{1}{3}(t^2+1)^{-2/3}\,2t = \frac{2t}{3\sqrt[3]{(t^2+1)^2}},$$

$$\frac{2t(y^3(t)+1)}{3y^2(t)\,(t^2+2)} = \frac{2t((t^2+1)+1)}{3(\sqrt[3]{t^2+1})^2(t^2+2)} = \frac{2t}{3(\sqrt[3]{t^2+1})^2},$$

per ogni t e dunque y è soluzione.

4. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{1-3t^2}{y(t)^2}$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d\sqrt[3]{3t-3t^3}}{dt} = \frac{1}{3}\,(3t-3t^3)^{-2/3}\,(3-9t^2) = \frac{1-3t^2}{\sqrt[3]{(3t-3t^3)^2}},$$

$$\frac{1-3t^2}{y^2(t)} = \frac{1-3t^2}{\sqrt[3]{(3t-3t^3)^2}}.$$

in conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{1-3t^2}{y^2(t)}$ per ogni t e dunque y è soluzione.

5. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = ty^3(t)$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{1}{2}\,(1-t^2)^{-3/2}\,(-2t) = \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)^3}},$$

$$ty^3(t) = t\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = ty^3(t)$ per ogni t e dunque y è soluzione.

6. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]1,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + \dfrac{t}{y(t)}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(t\sqrt{2\log t}\right) = \sqrt{2\log t} + t\frac{1}{2\sqrt{2\log t}}\,\frac{2}{t} = \sqrt{2\log t} + \frac{1}{\sqrt{2\log t}},$$

$$\frac{y(t)}{t} + \frac{t}{y(t)} = \frac{t\sqrt{2\log t}}{t} + \frac{t}{t\sqrt{2\log t}} = \sqrt{2\log t} + \frac{1}{\sqrt{2\log t}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + \dfrac{t}{y(t)}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$ e dunque y è soluzione.

7. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $[1,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{y(t)^2-1}{2t}$ per ogni $t \in [1,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \frac{-(1+t)-(1-t)\cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{-2}{(1+t)^2},$$

$$\frac{y(t)^2-1}{2t}=\frac{\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}-1}{2t}=\frac{(1-2t+t^2)-(1+2t+t^2)}{2t(1+t)^2}=\frac{-2}{(1+t)^2},$$

In conclusione si ha che $y'(t)=\dfrac{y(t)^2-1}{2t}$ per ogni $t\in[1,+\infty[$ e dunque y è soluzione.

8. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,1[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t)=\dfrac{2y(t)(y(t)+1)}{t}$ per ogni $t\in]0,1[$. Si ha

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)=\frac{2t(1-t^2)-t^2(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{2t}{(1-t^2)^2}.$$

$$\frac{2y(t)(y(t)+1)}{t}=\frac{2\frac{t^2}{1-t^2}\left(\frac{t^2}{1-t^2}+1\right)}{t}=2\frac{t}{1-t^2}\left(\frac{t^2+(1-t^2)}{1-t^2}\right)=\frac{2t}{(1-t^2)^2}.$$

In conclusione si ha che $y'(t)=\dfrac{2y(t)(y(t)+1)}{t}$ per ogni $t\in]0,1[$ e dunque y è soluzione.

9. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]1,\mathrm{e}[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t)=\dfrac{t\sqrt{1-y^2(t)}}{t^2+1}$ per ogni $t\in]1,\mathrm{e}[$. Si ha

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\,\mathrm{sen}(\log t-\pi/2)=\frac{\cos(\log t-\pi/2)}{t}.$$

Osserviamo che $t\in]1,\mathrm{e}[$ implica $\log t-\pi/2\in]-\pi/2,1-\pi/2[$, intervallo su cui il coseno è positivo. Perciò $\cos(\log t-\pi/2)=|\cos(\log t-\pi/2)|=\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\log t-\pi/2)}$, quindi

$$\frac{t\sqrt{1-y^2(t)}}{t^2+1}=\frac{t\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\log t-\pi/2)}}{t^2+1}=\frac{t\cos(\log t-\pi/2)}{t^2+1}.$$

Semplificando il coseno, l'equazione $y'(t)=\dfrac{t\sqrt{1-y^2(t)}}{t^2+1}$ è allora equivalente a

$$\frac{1}{t}=\frac{t}{t^2+1},$$

che non è verificata identicamente. Ad esempio per $2\in]1,\mathrm{e}[$ si ha $1/2\neq 2/5$. Quindi $y(t)$ non è soluzione dell'equazione.

10. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]1,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \sqrt{\frac{y(t)}{t-1}}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(2+\sqrt{t-1})^2 = 2(2+\sqrt{t-1})\frac{1}{2\sqrt{t-1}} = \frac{2+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}}.$$

$$\sqrt{\frac{y(t)}{t-1}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{t-1})^2}{t-1}} = \frac{2+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \sqrt{\frac{y(t)}{t-1}}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$ e dunque y è soluzione.

11. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]1,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{1-y^2(t)}{t}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \frac{2t(t^2-1)-(t^2+1)2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}.$$

$$\frac{1-y^2(t)}{t} = \left(1-(\frac{t^2+1}{t^2-1})^2\right)\frac{1}{t} = \left(\frac{(t^2-1)^2-(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2}\right)\frac{1}{t} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{1-y^2(t)}{t}$ per ogni $t \in]1,+\infty[$ e dunque y è soluzione.

12. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $\mathbb{R}$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{y^2(t)-1}{ty(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{3t^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{3t^2+1}}6t = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},$$

$$\frac{y^2(t)-1}{ty(t)} = \frac{(\sqrt{3t^2+1})^2-1}{t\sqrt{3t^2+1}} = \frac{(3t^2+1)-1}{t\sqrt{3t^2+1}} = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{y^2(t)-1}{ty(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

13. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{2\sqrt{y(t)}}{t+2}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(1+\ln(t+2))^2 = 2(1+\ln(t+2))\frac{1}{t+2} = \frac{2(1+\ln(t+2))}{t+2},$$

$$\frac{2\sqrt{y(t)}}{t+2} = \frac{2\sqrt{(1+\ln(t+2))^2}}{t+2} = \frac{2(1+\ln(t+2))}{t+2}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{2\sqrt{y(t)}}{t+2}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$, dunque y è soluzione.

14. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $\mathbb{R}$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{3ty(t)}{\ln y(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$y'(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}} \frac{1}{2\sqrt{3t^2+1}} 6t = \frac{3t\,\mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}}}{\sqrt{3t^2+1}},$$

$$\frac{3ty(t)}{\ln y(t)} = \frac{3t\,\mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}}}{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}}} = \frac{3t\,\mathrm{e}^{\sqrt{3t^2+1}}}{\sqrt{3t^2+1}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{3ty(t)}{\ln y(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

15. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = -\frac{2}{t^3},$$

$$\frac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1} = \frac{2t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t^2+1} = \frac{2t\frac{1}{t^2}\left(t^2+1\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t^2+1} = -\frac{2}{t^3}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$, dunque y è soluzione.

16. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,\pi[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\operatorname{sen} t}$ per ogni $t \in]0,\pi[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} t + 2}} \cos t,$$

$$\frac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\operatorname{sen} t} = \frac{((\operatorname{sen} t+2)-2)\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t+2}\,\operatorname{sen} t} = \frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t+2}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\operatorname{sen} t}$ per ogni $t \in]0,\pi[$, dunque y è soluzione.

Esercizio 24.20. *a. Verificare che sull'intervallo* $[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$ *la funzione* $y(t) = \operatorname{sen}(t^2)$ *è soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{dy}{dt} = 2t\sqrt{1 - y^2}.$$

b. La funzione è ancora soluzione in $[\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}]$*? Motivare la risposta.*

$\boxed{R}$ *a.* La funzione $y(t)$ è definita e derivabile sull'intervallo dato ed è ivi soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = 2t\sqrt{1 - y(t)^2}$. Si ha

$$y'(t) = \frac{d \operatorname{sen}(t^2)}{dt} = 2t\cos(t^2).$$

Osserviamo che se $t \in [-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$ allora $t^2 \in [0, \pi/2]$, quindi $\cos(t^2)$ è positivo e vale $\cos(t^2) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(t^2)}$. Perciò

$$2t\sqrt{1 - y(t)^2} = 2t\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(t^2)} = 2t\cos(t^2).$$

in conclusione si ha che $y'(t) = 2t\sqrt{1 - y(t)^2}$ per ogni $t \in [-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$ e dunque y è soluzione.
b. Se $t \in [\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2}]$ allora $t^2 \in [\pi/2, 3\pi/2]$, quindi ora $\cos(t^2)$ è negativo e vale $\cos(t^2) = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(t^2)}$. In questo caso y non è soluzione dell'equazione data. Risolve invece l'equazione $y' = -2t\sqrt{1 - y^2}$.

Esercizio 24.21. *Verificare che la funzione* $y(t) = \ln^2 t$ *è soluzione su* $]1, +\infty[$ *dell'equazione differenziale*

$$y' = \frac{2\sqrt{y}}{t}.$$

È vero che $y(t)$ *è soluzione anche su* $]0, 1[$ *?*

$\boxed{R}$ La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]1, +\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{2\sqrt{y(t)}}{t}$ per ogni $t \in]1, +\infty[$. Si ha

$$y'(t) = (2\ln t)\frac{1}{t} = \frac{2\ln t}{t},$$

$$\frac{2\sqrt{y(t)}}{t} = \frac{2\sqrt{\ln^2 t}}{t} = \frac{2|\ln t|}{t}.$$

Poiché per $x > 1$ si ha $\ln t > 0$ e dunque $|\ln t| = \ln t$, in conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{2\sqrt{y(t)}}{t}$ per ogni $t \in]1, +\infty[$, dunque y è soluzione.

Se invece $x \in]0,1[$, il logaritmo è negativo, quindi $|\ln t| = -\ln t$ e $y(t)$ non è più soluzione.

Esercizio 24.22. *a. Verificare che al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$ le funzioni $y(t) = \dfrac{t^3}{2} + t\ln t + ct$ sono tutte soluzioni su $]0,+\infty[$ dell'equazione differenziale*

$$y' = \frac{y}{t} + t^2 + 1.$$

b. Trovare l'unico valore di c per cui la relativa soluzione soddisfa $y(1) = 2$.

$\boxed{R}$ *a.* Sia $c \in \mathbb{R}$ fissato. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + t^2 + 1$ per ogni $t \in]0,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{3}{2}t^2 + \left(\ln t + t\frac{1}{t}\right) + c = \frac{3}{2}t^2 + \ln t + 1 + c,$$

$$\frac{y(t)}{t} + t^2 + 1 = \left(\frac{t^2}{2} + \ln t + c\right) + t^2 + 1 = \frac{3}{2}t^2 + \ln t + 1 + c.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t} + t^2 + 1$ per ogni $t \in]0,+\infty[$, dunque y è soluzione.
b. Sostituendo si trova $y(1) = 1/2 + c$. Dev'essere allora $1/2 + c = 2$ ovvero $c = 3/2$.

Esercizio 24.23. *Per l'equazione differenziale*

$$y' = \frac{y(y+1)}{t}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni:

1. $y_1(t) = t^2 - 2t, \quad t \in]0,+\infty[;$ *2.* $y_2(t) = \dfrac{2t}{1-2t}, \quad t \in]1/2,+\infty[.$

$\boxed{R}$ *1.* La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile in $]0,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \dfrac{y_1(t)(y_1(t)+1)}{t}$ per ogni $t > 0$. Si ha

$$y_1'(t) = 2t - 2,$$

$$\frac{y_1(t)(y_1(t)+1)}{t} = \frac{(t^2-2t)(t^2-2t+1)}{t} = (t-2)(t-1)^2.$$

Si osserva, ad esempio, che

$$2 = y_1'(2) \neq \frac{y_1(2)(y_1(2)+1)}{2} = 0$$

quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

2. La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile su $]1/2, +\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \dfrac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t}$ per ogni $t \in]1/2, +\infty[$. Si ha

$$y_2'(t) = \frac{2(1-2t) - 2t(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{2}{(1-2t)^2},$$

$$\frac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{1-2t}\Big(\frac{2t}{1-2t} + 1\Big) = \frac{2}{1-2t}\Big(\frac{1}{1-2t}\Big) = \frac{2}{(1-2t)^2}.$$

In conclusione si ha che $y_2'(t) = \dfrac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t}$ per ogni $t \in]1/2, +\infty[$, dunque y_2 è soluzione.

Esercizio 24.24. *Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy*

1. $\begin{cases} y' = -2y + t \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad y = 1 - \dfrac{t^2}{2}$*;*

2. $\begin{cases} y' = 4y - 1 \\ y(1) = -2, \end{cases} \qquad y(t) = -2t$*;*

3. $\begin{cases} y' = 4y \\ y(0) = 10, \end{cases} \qquad y(t) = 10\cos(4t)$*;*

4. $\begin{cases} y' = y \log t + t^t, \quad t > 0 \\ y(1) = 1, \end{cases} \qquad y(t) = 1$*;*

5. $\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 10, \end{cases} \qquad y(t) = 8t + 10$*;*

6. $\begin{cases} y' = 3t^2 y + t^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad y(t) = -1/3$*;*

7. $\begin{cases} y' = -2y + 5t \\ y(0) = 2, \end{cases} \qquad y(t) = 3t + 2 + \arctan t$*;*

8. $\begin{cases} y' = \dfrac{2t}{t^2+1} y + 1 \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad y(t) = t^2 + 1$*;*

9. $\begin{cases} y' = y - 2t \\ y(0) = 3, \end{cases} \qquad y(t) = 2t + 3;$

10. $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{1-x} y = 1 \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad y(x) = \dfrac{x^2}{1-x}.$

a. dire se la funzione a fianco indicata è una soluzione; b. in caso contrario, determinare una soluzione ed eseguire la verifica; c. dire se possono esistere altre soluzioni del problema oltre a quella trovata, giustificando la risposta.

$\boxed{R}$ *1.a.* non è soluzione; *1.b.* $y(t) = \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$; *1.c.* non vi possono essere altre soluzioni perché l'equazione differenziale è di tipo lineare.

2.a. La funzione data $y(t) = -2t$ soddisfa la condizione iniziale $y(1) = -2$ ma non l'equazione differenziale perché

$$y'(t) = -2$$

mentre

$$4y(t) - 1 = -8t - 1,$$

quindi non è soluzione.
2.b. Ricordiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $a(t)$ e $b(t)$ funzioni continue su un intervallo aperto I contenente il punto t_0, ammette una ed una sola soluzione data dalla formula risolutiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)}\, b(s)\, ds + y_0 \Big)$$

dove $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$.

Nel caso in esame si ha $a(t) = 4$, $b(t) = -1$, $t_0 = 1$ e $y_0 = -2$, pertanto

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = \int_{1}^{t} 4\, d\tau = 4(t-1)$$

e quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)}\, b(s)\, ds + y_0 \Big) = \mathrm{e}^{4(t-1)} \Big(\int_{1}^{t} \mathrm{e}^{-4(s-1)} (-1)\, ds - 2 \Big) \\ &= \mathrm{e}^{4(t-1)} \Big(- \Big[\frac{\mathrm{e}^{-4(s-1)}}{-4} \Big]_1^t - 2 \Big) = \mathrm{e}^{4(t-1)} \big(\frac{1}{4} (\mathrm{e}^{-4(t-1)} - \mathrm{e}^0) - 2 \big) \\ &= \mathrm{e}^{4(t-1)} \big(\frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{-4(t-1)} - \frac{1}{4} - 2 \big) = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\, \mathrm{e}^{4(t-1)} \end{aligned}$$

è una soluzione del problema di Cauchy. Eseguiamo la verifica. Poiché

$$y(0) = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\,\mathrm{e}^0 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$$

allora la condizione iniziale è soddisfatta. Si ha poi

$$y'(t) = -\frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{4(t-1)}\,4 = -9\,\mathrm{e}^{4(t-1)},$$

mentre

$$4y(t) - 1 = 4\big(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{4(t-1)}\big) - 1 = 1 - 9\,\mathrm{e}^{4(t-1)} - 1 = -9\,\mathrm{e}^{5(t-1)}$$

quindi anche l'uguaglianza $y'(t) = 4y(t) - 1$ è soddisfatta.

2.c. Non esistono altre soluzioni perché l'equazione è lineare.

3.a. non è soluzione; *3.b.* $y(x) = 10\,\mathrm{e}^{4x}$; *3.c.* la soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

4.a. no; *4.b.* $y(t) = t^t(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2-t} + \mathrm{e}^{1-t})$; *4.c.* non esistono altre soluzioni perché l'equazione è lineare.

5.a. no; *5.b.* $y(t) = 8\,\mathrm{e}^{-t} + 2$; *5.c.* la soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

6.a. Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene $0 = 3t^2\big(-\frac{1}{3}\big) + t^2$ che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 1$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.
6.b. Si ricorda che la generica soluzione dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = 3t^2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = t^3$. La generica soluzione è dunque

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^3} \int \mathrm{e}^{-t^3}\, t^2\, dt = -\frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3} \int \mathrm{e}^{-t^3}(-3t^2)\, dt$$

Dalla tabella 2 di pagina 212 si vede che

$$\int \mathrm{e}^{f(t)}\, f'(t)\, dt = \mathrm{e}^{f(t)} + c$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = -\frac{\mathrm{e}^{t^3}}{3}\big(\mathrm{e}^{-t^3} + c\big) = -\frac{1}{3} + \bar{c}\, \mathrm{e}^{t^3}$$

essendo $\bar{c} = -c/3$ un generico numero reale al pari di c.

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene l'equazione $1 = -1/3 + \bar{c}$ quindi $\bar{c} = 4/3$ e la soluzione è $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{t^3}$

6.c. La soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

7.a. Si ha $y'(t) = 3 + \dfrac{1}{1+t^2}$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 + \frac{1}{1+t^2} = -2(3t + 2 + \arctan t) + 5t$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $4 \neq -4$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che invece la funzione soddisfa la seconda condizione, cioè $y(0) = 2$.

7.b. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti non costanti, del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)$$

le cui soluzioni sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. In questo caso si ottiene che $A(t) = -2t$ e

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \int \mathrm{e}^{2t}\, 5t\, dt.$$

L'integrale si risolve mediante il metodo d'integrazione per parti:

$$\int \mathrm{e}^{2t}\, 5t\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 5t - \int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 5\, dt = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 5t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} 5 + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. In conclusione si ottiene che

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\big(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} 5t - \frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} 5 + c\big) = \frac{5}{2}t - \frac{5}{4} + c \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

con c costante arbitraria. Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si ricava $2 = -\frac{5}{4} + c$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 13/4$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{5}{2}t - \frac{5}{4} + \frac{13}{4}\,\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Verifichiamolo:

$$y'(t) = \frac{5}{2} - \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}$$

mentre

$$-2y(t) + 5t = (-5t + \frac{5}{2} - \frac{13}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}) + 5t$$

Si riconosce facilmente che queste due funzioni coincidono. Inoltre, sostituendo, si ottiene $y(0) = 2$ dunque y è effettivamente soluzione del problema di Cauchy.

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{-A(s)}\,b(s)\,ds + 2\Big)$$

dove $A(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$. In questo caso $A(t) = -2t$ e

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-2t}\Big(\int_0^t \mathrm{e}^{2s}\,5s\,ds + 2\Big) = \mathrm{e}^{-2t}\Big(\Big[5s\frac{\mathrm{e}^{2s}}{2} - 5\frac{\mathrm{e}^{2s}}{4}\Big]_0^t + 2\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}\big(5t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - 5\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + \frac{5}{4} + 2\big) = \frac{5}{2}t - \frac{5}{4} + \frac{13}{4}\,\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

7.c. La soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

8.a. non è soluzione; *8.b.* $y(t) = (t^2 + 1)(\operatorname{arctg} t + 1)$; *8.c.* La soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

9.a. no; *9.b.* $y(t) = \mathrm{e}^t + 2t + 2$; *9.c.* La soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

10.a. non è soluzione; *10.b.* $y(x) = \dfrac{2x - x^2}{2(1 - x)}$; *10.c.* La soluzione è unica perché l'equazione è lineare.

Esercizio 24.29. *Dati i problemi di Cauchy*

$$\mathit{1.}\ \begin{cases} y' = ty^4 \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \mathit{2.}\ \begin{cases} y' = ty^4 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

a. dire se la funzione $y(t) = \sqrt[4]{2t+1}$ è una soluzione del problema 1; b. determinare una soluzione del problema 1, nel caso in cui non lo sia già la funzione di cui al punto precedente, ed eseguire la verifica; c. esibire una soluzione del problema 2.

$\boxed{R}$ *a.* La funzione data $y(t) = \sqrt[4]{2t+1}$ soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$ ma non l'equazione differenziale perché

$$y'(t) = \frac{1}{4}(2t-1)^{-3/4}$$

mentre

$$ty(t)^4 = 2t^2 - t,$$

quindi non è soluzione.
b. Scrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dt} = ty^4$$

e separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{y^4} = t\,dt,$$

quindi, integrando rispetto a y a primo membro e rispetto a t al secondo, si ha (cambiando opportunamente nome alle variabili rispetto a cui si integra)

$$\int_1^y \frac{dz}{z^4} = \int_0^t x\,dx.$$

Poiché una primitiva di z^{-4} è $-z^{-3}/3$ e una primitiva di x è $z^2/2$ allora si ottiene

$$\Big[-z^{-3}/3\Big]_1^y = \Big[x^2/2\Big]_0^t$$

che equivale a

$$-\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} \iff \frac{1}{y^3} = 1 - \frac{3t^2}{2} \iff y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{3t^2}{2}}} = (1 - \frac{3t^2}{2})^{-1/3}$$

Verifichiamo che

$$y(t) = (1 - \frac{3t^2}{2})^{-1/3}, \quad t \in]-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}[$$

è una soluzione del problema. Infatti

$$y(0) = 1^{-1/3} = 1,$$

quindi la condizione iniziale è soddisfatta. Inoltre, per la formula di derivazione delle funzioni composte,

$$y'(t) = -\frac{1}{3}(1 - \frac{3t^2}{2})^{-4/3}(-3t) = (1 - \frac{5t^2}{2})^{-4/3}t$$

mentre

$$ty^4(t) = t(1 - \frac{3t^2}{2})^{-4/3}$$

e quindi è soddisfatta anche l'equazione differenziale.
c. Una soluzione è $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 24.30. *Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy,*

1. $\begin{cases} y' = (3t + 2\cos t)y^6 \\ y(0) = 1, \end{cases}$ $\qquad y(t) = t + \cos t;$

2. $\begin{cases} y'(t) = te^{-2y} \\ y(1) = 1, \end{cases}$ $\qquad y(t) = \log t;$

3. $\begin{cases} y' = \dfrac{2}{y^3} \\ y(0) = 1, \end{cases}$ $\qquad y(t) = \sqrt[3]{t+1};$

4. $\begin{cases} y' = \dfrac{2t+3}{y^4} \\ y(1) = 2, \end{cases}$ $\qquad y(t) = 3t + 2;$

a. dire se la funzione a fianco indicata è una soluzione; b. nel caso in cui non lo sia, determinare una soluzione del problema ed eseguire la verifica.

$\boxed{R}$ *1.a.* Si ha $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$1 - \operatorname{sen} t = (3t + 2\cos t)(t + \cos t)^6$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $1 \neq 2$). La funzione non è dunque soluzione. Si osservi che invece la funzione soddisfa la seconda condizione, cioè $y(0) = 1$.
1.b. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$, utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^{-6}\,dy = (3t + 2\cos t)\,dt$$

e integrando

$$\int y^{-6}\,dy = \int (3t + 2\cos t)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^{-5}}{-5} = \frac{3}{2}t^2 + 2\,\mathrm{sen}\,t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Passando alle radici si ottiene infine

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{-\frac{15}{2}t^2 - 10\,\mathrm{sen}\,t + c}}$$

con c costante arbitraria. Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ricava $1 = \frac{1}{\sqrt[5]{c}}$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 1$. La soluzione è quindi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - \frac{15}{2}t^2 - 10\,\mathrm{sen}\,t}}.$$

Verifichiamolo:

$$y'(t) = \big((1 - \frac{15}{2}t^2 - 10\,\mathrm{sen}\,t)^{-\frac{1}{5}}\big)' = -\frac{1}{5}(1 - \frac{15}{2}t^2 - 10\,\mathrm{sen}\,t)^{-\frac{6}{5}}(-15t - 10\cos t)$$

mentre

$$(3t + 2\cos t)y(t)^6 = (3t + 2\cos t)(1 - \frac{15}{2}t^2 - 10\,\mathrm{sen}\,t)^{-\frac{6}{5}}.$$

Si riconosce facilmente che queste due funzioni coincidono. Inoltre, sostituendo, si ottiene

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - 0 - 0}} = 1$$

dunque y è effettivamente soluzione del problema di Cauchy.

Alternativamente, si poteva utilizzare direttamente la formula risolutiva per le equazioni a variabili separabili (insieme alla formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_1^y z^{-6}\,dz = \int_0^t (3s + 2\cos s)\,ds \quad \Longrightarrow \quad \Big[\frac{z^{-5}}{-5}\Big]_1^y = \Big[\frac{3}{2}s^2 + 2\,\mathrm{sen}\,s\Big]_0^t$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{y^{-5}}{-5} - \frac{1}{-5} = \frac{3}{2}t^2 + 2\,\mathrm{sen}\,t$$

che risolvendo rispetto a y fornisce la soluzione cercata.

2.a. non è soluzione; *2.b.* $y(t) = \dfrac{\log(t^2 + \mathrm{e}^2 - 1)}{2}$.

3.a. no; *3.b.* $y(t) = \sqrt[4]{8t+1}$.

4.a. La funzione $y(t) = 3t + 2$ non è soluzione perché $y(1) = 5 \neq 2$.

4.b. Scrivendo $y' = \dfrac{dy}{dt}$ e separando le variabili si ha

$$y^4\,dy = (2t+3)\,dt.$$

Integrando

$$\int y^4\,dy = \int (2t+3)\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^5}{5} = t^2 + 3t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Passando alle radici si ottiene infine

$$y(t) = \sqrt[5]{5t^2 + 15t + c}$$

Imponendo la condizione $y(1) = 2$ si ricava $2 = \sqrt[5]{20+c}$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 12$. La soluzione è quindi $y(t) = \sqrt[5]{5t^2 + 15t + 12}$.