20. Problemi di massimo e minimo: esercizi

Esercizio 20.14. *Calcolare il massimo e minimo delle seguenti funzioni continue negli insiemi a fianco indicati*

1. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x},\ x \in [0,2]$;
2. $f(x) = x \log x,\ x \in [\frac{1}{\mathrm{e}^2}, 1]$;
3. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x},\ x \in [0,1]$;
4. $f(x) = x + 2\cos x,\ x \in [0, \pi/2]$;
5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{x+1},\ x \in [0,2]$.

$\boxed{R}$ *1.* La funzione f è ovunque derivabile su $(0,2)$, quindi i punti di massimo e minimo assoluti (che esistono per il Teorema di Weierstrass) devono essere cercati tra gli estremi dell'intervallo e tra i punti dove si annulla la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. I punti di massimo e minimo relativo devono allora essere cercati nell'insieme $\{0,1,2\}$. Si ha $f(0) = 0$, $f(1) = \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$, $f(2) = 2\,\mathrm{e}^{-2} = 2/\mathrm{e}^2$ quindi 0 è punto di minimo ed il minimo assoluto è 0 mentre 1 è punto di massimo ed il massimo assoluto è $1/\mathrm{e}$.

2. La funzione f è ovunque derivabile su $(\frac{1}{e^2}, 1)$, quindi i punti di massimo e minimo assoluti (che esistono per il Teorema di Weierstrass) devono essere cercati tra gli estremi dell'intervallo e tra i punti dove si annulla la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = 1 \cdot \log x + \frac{x}{x} = \log x + 1.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$. I punti di massimo e minimo relativo devono allora essere cercati nell'insieme $\{1/\mathrm{e}^2, 1/\mathrm{e}, 1\}$. Si ha $f(1/\mathrm{e}^2) = -2/\mathrm{e}^2$, $f(1/\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$, $f(1) = 0$. Essendo $-1/\mathrm{e} < -2/\mathrm{e}^2 <$

0 si ha che $1/\mathrm{e}$ è punto di minimo ed il minimo assoluto è $-1/\mathrm{e}$ mentre 1 è punto di massimo ed il massimo assoluto è 0.

3. La funzione f è ovunque derivabile su $(0,1)$, quindi i punti di massimo e minimo assoluti (che esistono per il Teorema di Weierstrass) devono essere cercati tra gli estremi dell'intervallo e tra i punti dove si annulla la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1/2$. I punti di massimo e minimo relativo devono allora essere cercati nell'insieme $\{1/2, 0, 1\}$. Si ha $f(1/2) = 2/\sqrt{\mathrm{e}}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3/\mathrm{e}$. Essendo $1 < 3/\mathrm{e} < 2/\sqrt{\mathrm{e}} < 0$ si ha che 0 è punto di minimo ed il minimo assoluto è 1 mentre $1/2$ è punto di massimo ed il massimo assoluto è $2/\sqrt{\mathrm{e}}$.

4. La funzione f è ovunque derivabile su $(0, \pi/2)$, quindi i punti di massimo e minimo assoluti (che esistono per il Teorema di Weierstrass) devono essere cercati tra gli estremi dell'intervallo e tra i punti dove si annulla la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = 1 - 2\sin x.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 1/2$. Questa equazione ha infinite soluzioni su $\mathbb{R}$ ma l'unica soluzione che appartiene all'intervallo considerato è $\pi/6$. I punti di massimo e minimo relativo devono allora essere cercati nell'insieme $\{\pi/6, 0, \pi/2\}$. Si ha $f(\pi/2) = \pi/2$, $f(0) = 2$, $f(\pi/6) = \pi/6 + \sqrt{3}$. Essendo $\pi/2 < 2 < \pi/6 + \sqrt{3}$ si ha che $\pi/2$ è punto di minimo ed il minimo assoluto è $\pi/2$ mentre $\pi/6$ è punto di massimo ed il massimo assoluto è $\pi/6 + \sqrt{3}$.

5. La funzione f è ovunque derivabile su $(0,2)$, quindi i punti di massimo e minimo assoluti (che esistono per il Teorema di Weierstrass) devono essere cercati tra gli estremi dell'intervallo e tra i punti dove si annulla la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{2(x+1)} - \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{(x+1)^2} = \mathrm{e}^{x/2}\,\frac{x-1}{2(x+1)^2}.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. I punti di massimo e minimo assoluto devono allora essere cercati nell'insieme $\{1, 0, 2\}$. Si ha $f(0) = 1$, $f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}/2$, $f(2) = \mathrm{e}/3$. Essendo $\sqrt{\mathrm{e}}/2 < \mathrm{e}/3 < 1$ si ha che 1 è punto di minimo ed il minimo assoluto è $\sqrt{\mathrm{e}}/2$ mentre 0 è punto di massimo ed il massimo assoluto è 1.

Esercizio 20.15. *Per ciascuna delle seguenti funzioni*

$$1.\ f(x) = \operatorname{arctg}(2\sqrt{x} - x), \qquad 2.\ g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1},$$

$$3.\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2 \log x}, \qquad 4.\ f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$5.\ g(x) = \frac{|x+2|}{x + |2x-3|}, \qquad 6.\ h(x) = \log(x + \frac{1}{x}),$$

$$7.\ f(x) = \log(-x^2 - 2x), \qquad 8.\ g(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2},$$

$$9.\ g(x) = \frac{4-x^2}{2x+5}, \qquad 10.\ g(x) = \frac{1}{x^2-3x+2},$$

individuare il dominio, calcolare gli estremi superiore e inferiore e dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo. Per le funzioni di cui ai punti 9 e 10, calcolare, se esistono, il massimo e il minimo della restrizione agli intervalli $[-2, 0]$ *e* $[-1, 0]$*, rispettivamente.*

$\boxed{R}$ *1.* $D = [0, +\infty[$, $\inf f = -\pi/2$ e non è minimo, $\max f = f(1) = \pi/4$.
2. $D = \mathbb{R}$, $\min g = g(1) = 0$, $\max g = g(-1) = 2$.
3. $D =]0, +\infty[$, $\inf f = 0$ e non è minimo, $\max f = f(1/\sqrt{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}^{1/2\,\mathrm{e}}$.
4. $D =]0, +\infty[$, $\sup f = +\infty$, $\min f = f(1/\sqrt[5]{16}) = 1/4^{4/5} + 1/4^{1/5}$.
5. $D = \mathbb{R}$, $\min g = g(-2) = 0$, $\max g = g(3/2) = 7/3$.
6. $D =]0, +\infty[$, $\sup h = +\infty$, $\min h = h(1) = \log 2$.
7. $D =]-2, 0[$, $\max f = f(-1) = 0$, $\inf f = -\infty$ e non è minimo.

8. g è una funzione razionale definita per ogni $x \neq 0$. La funzione è inoltre continua e derivabile sul proprio dominio. La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Il numeratore è maggiore o uguale a zero se e solo se $x < 0$, il denominatore è positivo se $x > 1$. Ne consegue che la derivata prima è

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x < 0 \text{ oppure } x > 1, \\ = 0, & \text{se } x = 0, \\ > 0, & \text{se } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Allora la funzione è decrescente per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre è crescente su $(0, 1)$. In $x = 1$ ammette un minimo relativo con $g(0) = -1$.

Poichè $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$ la funzione è superiormente illimitata per cui $\sup g = +\infty$. Si ha infine $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ ed essendo $0 > -1 = g(0)$ si ha che $\inf g = \min g = -1$ e la funzione ammette così un minimo assoluto.

9. g è definita per tutti gli $x \neq -5/2$. Sul dominio, il numeratore è positivo se $-2 < x < 2$ ed il denominatore è positivo se $x > -5/2$. Quindi g è positiva se $x < -5/2$ oppure $-2 < x < 2$. Inoltre si annulla in -2 e 2. Infine

$$\lim_{x\to -\frac{5}{2}^-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{5}{2}^+} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty.$$

Dallo studio dei limiti risulta evidente che g non è limitata inferiormente nè superiormente.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{-2x(2x+5) - (4-x^2)2}{(2x+5)^2} = -2\frac{x^2+5x+4}{(2x+5)^2} = -2\frac{(x+1)(x+4)}{(2x+5)^2},$$

perciò, limitatamente al dominio di definizione, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $-4 \leq x < -5/2$ oppure $-5/2 < x \leq -1$. Quindi la funzione è crescente su $]-4, -5/2[$ e $]-5/2, -1[$ mentre è decrescente su $]-\infty, -4[$ e $]-1, +\infty[$. In $x = -4$ ammette un minimo relativo ed in $x = -1$ ammette un massimo relativo.

Limitatamente all'intervallo $[-2, 0]$, dallo studio della derivata prima segue che g è crescente su $[-2, -1]$ e decrescente su $[-1, 0]$. Quindi il massimo della restrizione viene assunto in -1 e vale $g(-1) = 1$ mentre il minimo viene assunto in uno dei due estremi. Essendo $g(-2) = 0 < 4/5 = g(0)$ si ha che il minimo è uguale a 0 e viene assunto in $x = -2$.

Dallo studio della crescenza di g segue che l'immagine è data da

$$[g(-4), +\infty[\cup]-\infty, g(-1)[= [4, +\infty[\cup]-\infty, 1].$$

10. g è definita, continua e derivabile per tutti gli x tali che non annullino il denominatore, ovvero su $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. La funzione è positiva su $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ e negativa su $]1, 2[$.

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0,$$

mentre dallo studio del segno si ha che

$$\lim_{x\to 1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty.$$

Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}.$$

Limitatamente al dominio di definizione, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x-3 \leq 0$ ovvero $x \leq 3/2$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]3/2, 2[\cup]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 3/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, 3/2[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty, 1[\cup]1, 3/2[$ mentre è decrescente su $]3/2, 2[\cup]2, +\infty[$. In $x = 3/2$ ammette un massimo relativo.

Sul dominio la derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{2(x^2-3x+2)^2 - (2x-3)2(x^2-3x+2)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^4} \\ &= -2\frac{(x^2-3x+2)-(2x-3)^2}{(x^2-3x+2)^3} = 2\frac{3x^2-9x+7}{(x^2-3x+2)^3}. \end{aligned}$$

Il numeratore è sempre positivo, perciò il segno della derivata seconda coincide con quello del denominatore e quindi col segno della funzione stessa. Ne deriva che la funzione è convessa su $]-\infty, 1[$ e su $]2, +\infty[$, mentre è concava su $]1, 2[$.

La funzione è continua se ristretta all'intervallo $[-1, 0]$ dunque per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Poiché dal punto d) segue che g è sempre strettamente crescente su $[-1, 0]$, allora il minimo coincide con $g(-1) = 1/6$ ed il massimo con $g(0) = 1/2$.

Esercizio 20.16. *Data la funzione*

$$g(x) = x\,\mathrm{e}^x \log x - \mathrm{e}^x,$$

1. determinare il dominio; 2. calcolare i limiti negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio; 3. determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo per la funzione; 4. dire se la funzione è limitata inferiormente e/o superiormente; 5. cosa si può dire sul segno e sugli zeri di g? 6. dopo avere verificato che la funzione

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}], \\ -1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è continua, determinarne il massimo e il minimo su $[0, \mathrm{e}]$.

$\boxed{R}$ *1.-2.* g è definita per tutti gli $x > 0$ per cui è definito il logaritmo e si ha

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} ((x \log x)\, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) = -1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x (x \log x - 1) = +\infty.$$

3. La derivata prima è

$$g'(x) = \mathrm{e}^x \log x + x\, \mathrm{e}^x \log x + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (x+1)\, \mathrm{e}^x \log x.$$

Limitatamente al dominio di definizione, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $\log x \geq 0$ ovvero $x \geq 1$. Quindi la funzione è crescente su $]1, +\infty[$ mentre è decrescente su $]0, 1[$. In $x = 1$ ammette un minimo relativo.
4. La funzione risulta allora limitata inferiormente con minimo assoluto dato da $g(1) = -\mathrm{e}$ ma non limitata superiormente.
5. Dal teorema degli zeri per funzioni continue e dalle proprietà di crescita della funzione si ottiene che g ammette un unico zero che appartiene all'intervallo $]1, +\infty[$.
6. Dai limiti notevoli di g svolti sopra, si vede che $\tilde{g}$ è continua in 0. È inoltre anche banalmente continua in tutti gli altri punti. La derivata di $\tilde{g}$ su $]0, \mathrm{e}[$ coincide con quella di g e dunque si annulla solamente per $x = 1$. I punti di massimo e minimo di $\tilde{g}$ devono allora essere cercati all'interno dell'insieme $\{0, 1, \mathrm{e}\}$. Siccome $g(1) = -\mathrm{e} < g(0) = -1 < g(\mathrm{e}) = (\mathrm{e}+1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ si ha che $x_0 = 1$ è il punto di minimo e $x_1 = \mathrm{e}$ è il punto di massimo

Esercizio 20.17. *Per ciascuna delle seguenti funzioni*

$$\begin{array}{ll}
\textit{1. } g(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{x + 2}, & \textit{2. } g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 7}, \\[2ex]
\textit{3. } g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}, & \textit{4. } g(x) = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x - 2}, \\[2ex]
\textit{5. } g(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{x^2 + 1}, & \textit{6. } g(x) = (2x + 1)\, \mathrm{e}^{-3x}, \\[2ex]
\textit{7. } g(x) = x\ \mathrm{e}^{-x^2}, & \textit{8. } g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{3x + 1},
\end{array}$$

individuare il dominio, determinarne gli estremi superiore e inferiore e dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo. Riconoscere inoltre la presenza di eventuali asintoti.

$\boxed{R}$ *1.* Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ove la funzione è continua e derivabile.

Il numeratore è ≥ 0 se $x \leq 2-\sqrt{7}$ oppure $x \geq 2+\sqrt{7}$, mentre il denominatore è positivo se $x > -2$. Quindi

$$g(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}[, \\ = 0, & \text{se } x = 2-\sqrt{7} \text{ oppure } x = 2+\sqrt{7}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-2, 2-\sqrt{7}[\cup]2+\sqrt{7}, +\infty[. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-4-3/x}{1+2/x} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-2)^\pm} g(x) = \left[\frac{9}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x-3}{x^2+2x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(g(x)-x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x-3}{x+2} = -6,$$

la retta $y = x-6$ è un asintoto obliquo a $\pm\infty$. Dallo studio dei limiti fatto sopra risulta anche che la retta $x = -2$ è un asintoto verticale.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(2x-4)(x+2)-(x^2-4x-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2+4x-5 \geq 0$ ovvero $x \leq -5$ oppure $x \geq 1$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -5 \text{ oppure } x = 1 \\ < 0, & \text{se } x \in]-5, -2[\cup]-2, 1[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty, -5[$ e su $]1, +\infty[$, decrescente su $]-5, -2[$ e su $]-2, 1[$. In $x = -5$ e $x = 1$ ammette rispettivamente un massimo ed un minimo relativo.

2. Poichè il denominatore non si annulla mai, il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ove la funzione è continua e derivabile.

La funzione è banalmente sempre positiva. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+x+7} = 0,$$

da cui si deduce che la retta $y = 0$ (l'asse delle ascisse) è un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+7)^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x+1 \leq 0$ ovvero $x \leq -1/2$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-1/2, +\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty, -1/2[$, decrescente su $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ ammette un massimo relativo (ed assoluto).

3. Il denominatore si annulla per $x = -1$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile (funzione razionale).

Il numeratore è ≥ 0 se $x^2 - 2x - 2 \geq 0$ ovvero $x \geq 1 + \sqrt{3}$, oppure $x \leq 1 - \sqrt{3}$ mentre il denominatore è positivo per $x > -1$. Si ha allora

$$g(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1[\cup]1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = 1-\sqrt{3} \text{ oppure } x = 1+\sqrt{3}, \\ > 0, & \text{se } x \in]-1, 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}, +\infty[. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

Dai limiti ora calcolati si deduce che la retta $x = -1$ è un asintoto verticale. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-2}{x^2+x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(g(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x-2}{x-2} = -3,$$

perciò la retta di equazione $y = x - 3$ è un asintoto obliquo a $\pm\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x \geq 0$ ovvero $x \leq -2$ oppure $x \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty,-2[$ e su $]0,+\infty[$, decrescente su $]-2,-1[$ e su $]-2,0[$. In $x=-2$ e $x=0$ ammette rispettivamente un massimo e un minimo relativo.

4. Il denominatore si annulla per $x=2$, perciò il dominio è $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile (funzione razionale).

Il numeratore è ≥ 0 se $3-2x-x^2\geq 0$ ovvero $-3\leq x\leq 1$, mentre il denominatore è positivo per $x>2$. Si ha allora

$$g(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-3,1[\cup]2,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=-3 \text{ oppure } x=1,\\ >0, & \text{se } x\in]-\infty,-3[\cup]1,2[. \end{cases}$$

Si ha (limiti di funzioni razionali)

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\frac{3/x^2-2/x-1}{1-2/x}\right)=[\pm\infty\cdot(-1)]=\mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} g(x)=\left[\frac{-5}{0^{\pm}}\right]=\mp\infty.$$

Dai limiti ora calcolati si deduce che la retta $x=2$ è un asintoto verticale. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-2x-x^2}{x^2-2x}=-1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(g(x)-(-x)\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-4x}{x-2}=-4,$$

perciò la retta di equazione $y=-x-4$ è un asintoto obliquo a $\pm\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x)=\frac{(-2-2x)(x-2)-(3-2x-x^2)}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x+1}{(x-2)^2}.$$

Si ha $g'(x)\geq 0$ se e solo se $-x^2+4x+1\geq 0$ ovvero $2-\sqrt{5}\leq x\leq 2+\sqrt{5}$. Si ottiene

$$g'(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x\in]2-\sqrt{5},2[\cup]2,2+\sqrt{5}[,\\ =0, & \text{se } x=2-\sqrt{5} \text{ oppure } x=2+\sqrt{5},\\ <0, & \text{se } x\in]-\infty,2-\sqrt{5}[\cup]2+\sqrt{5},+\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]2-\sqrt{5},2[$ e su $]2,2+\sqrt{5}[$, decrescente su $]-\infty,2-\sqrt{5}[$ e su $]2+\sqrt{5},+\infty[$. In $x=2-\sqrt{5}$ e $x=2+\sqrt{5}$ ammette rispettivamente un minimo e un massimo relativo.

5. Il denominatore non si annulla mai, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

Poiché il denominatore è sempre positivo si ha facilmente che $g \geq 0$ se $6x^2 - x - 1 \geq 0$ cioè $-1/3 \leq x$ oppure $x \geq 1/2$.

Si ha facilmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 6$ (limite di funzione razionale).

Dal limite ora calcolato si deduce che la retta $y = 6$ è un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(12x-1)(x^2-1) - (6x^2-x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+14x-1}{(x^2+1)^2},$$

perciò $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 14x - 1 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -7-\sqrt{50}[\cup]-7+\sqrt{50}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -7 \pm \sqrt{50}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-7-\sqrt{50}, -7+\sqrt{50}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-7-\sqrt{50}, -7+\sqrt{50}[$, crescente su $]-\infty, -7-\sqrt{50}[$ e su $]-7+\sqrt{50}, +\infty[$. In $x = -7-\sqrt{50}$ e $x = -7+\sqrt{50}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

6. Il dominio è chiaramente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e la funzione è continua e derivabile.

L'esponenziale è una funzione strettamente positiva per cui $g(x) \geq 0$ se e solo se $2x + 1 \geq 0$ ovvero per ogni $x \geq -1/2$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\mathrm{e}^{3x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3x} + (2x+1)\,\mathrm{e}^{-3x}(-3) = -(1+6x)\,\mathrm{e}^{-3x}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $-(1+6x) \geq 0$ ovvero $x \leq -1/6$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-1/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/6, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/6[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty, -1/6[$, decrescente su $]-1/6, +\infty[$. In $x = -1/6$ ammette quindi un massimo relativo.

7. Il dominio è chiaramente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e la funzione è continua e derivabile.

L'esponenziale è una funzione strettamente positiva per cui $g(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$.

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right] = 0.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x\left(\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\right) = (1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $1 - 2x^2 \geq 0$ ovvero $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ottiene

$$g'(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \\ =0, & \text{se } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ >0, & \text{se } x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, decrescente su $]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e su $]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ammette rispettivamente un minimo ed un massimo relativo (ed assoluto).

8. Il denominatore si annulla per $x = -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

Poiché il numeratore è sempre positivo si ha facilmente che g è positiva per $x > -1/3$ e negativa per $x < -1/3$. La funzione non si annulla mai.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{3} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2/3}}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

Dai limiti sopra calcolati si deduce che la retta $x = -1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{3x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{6x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{6} = +\infty,$$

perciò non esistono asintoti obliqui a $+\infty$.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{e^{2x}\, 2(3x+1) - e^{2x}\, 3}{(3x+1)^2} = \frac{e^{2x}}{(3x+1)^2}(6x-1),$$

perciò si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]-1/3, 1/6[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]1/6, +\infty[$, decrescente su $]-\infty, -1/3[$ e su $]-1/3, 1/6[$. In $x = 1/6$ ammette un minimo relativo.

Esercizio 20.18. *Per ciascuna delle seguenti funzioni*

1. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2}$, *2.* $g(x) = \dfrac{2x+3}{(x-2)^2}$,

3. $g(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x - 3}$, *4.* $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$,

5. $g(x) = x \log^2 x$, *6.* $g(x) = (2x^2 + x + 1)\, e^x$,

7. $g(x) = \dfrac{x}{\log x}$, *8.* $g(x) = \dfrac{e^x}{2x+1}$,

individuare il dominio, calcolare gli estremi superiore e inferiore e dire se sono, rispettivamente, massimo e minimo. Determinare inoltre gli intervalli di concavità, convessità e gli eventuali punti di flesso.

$\boxed{R}$ *1.* g è una funzione razionale definita per ogni $x \neq 0$. La funzione è inoltre continua e derivabile sul proprio dominio. Il denominatore è sempre positivo, perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ ovvero se e solo se $x \geq 3$ oppure $x \leq -1$. Si ha facilmente

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = -\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} = 2\,\frac{x+3}{x^3}$$

Il denominatore è maggiore o uguale a zero se e solo se $x > 0$, il numeratore è positivo se $x > -3$. Ne consegue che la derivata prima è

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } -3 < x < 0, \\ = 0, & \text{se } x = -3, \\ > 0, & \text{se } x < -3 \text{ oppure } x > 0. \end{cases}$$

Allora la funzione è decrescente per $x \in (-3, 0)$, mentre è crescente su $(-\infty, -3)$ e su $(0, +\infty)$. In $x = -3$ ammette un massimo relativo con $g(-3) = 4/3$.

La derivata seconda è

$$g''(x) = 2\,\frac{x^3 - (x+3)3x^2}{x^6} = -2\,\frac{2x+9}{x^4}$$

perciò $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x + 9 \leq 0$ ovvero $x \leq -9/2$. La funzione è dunque convessa per $x < -9/2$ e concava per $x > -9/2$. In $x = -9/2$ la funzione ha un punto di flesso.

2. g è una funzione razionale definita per ogni $x \neq 2$. La funzione è inoltre continua e derivabile sul proprio dominio. Il denominatore è sempre positivo, perciò $g(x) \geq 0$ se e solo se $2x + 3 \geq 0$ ovvero se e solo se $x \geq -3/2$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm 2} g(x) = +\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2(x-2)^2 - (2x+3)2(x-2)}{(x-2)^4} = -2\frac{x+5}{(x-2)^3}$$

Il denominatore è maggiore o uguale a zero se e solo se $x > 2$, il numeratore è positivo se $x > -5$. Ne consegue che la derivata prima è

$$g'(x)\begin{cases} < 0, & \text{se } x < -5 \text{ oppure } x > 2, \\ = 0, & \text{se } x = -5, \\ > 0, & \text{se } -5 < x < 2. \end{cases}$$

Allora la funzione è decrescente per $x < -5$ e $x > 2$, mentre è crescente su $(-5, 2)$. In $x = -5$ ammette un minimo relativo con $g(-5) = -1/7$.

La derivata seconda è

$$g''(x) = -2\,\frac{(x-2)^3 - (x+5)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = 2\,\frac{2x+17}{(x-2)^4}$$

perciò $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x + 17 \geq 0$ ovvero $x \geq -17/2$. La funzione è dunque concava per $x < -17/2$ e convessa per $x > -17/2$ tranne in $x = 2$ dove non è definita. In $x = -17/2$ la funzione ammette un punto di flesso.

3. g è definita per tutti gli $x \neq 3$. Sul dominio g è positiva se $x > 3$, negativa se $x < 3$ e non si annulla mai. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{2x(x-3)-(x^2+16)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2} = \frac{(x-8)(x+2)}{(x-3)^2},$$

perciò $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 8$ oppure $x \leq -2$. Quindi la funzione è crescente su $(-\infty,-2)$ e $(8,+\infty)$ mentre è decrescente su $(-2,3)$ e $(3,8)$. In $x=-2$ ammette un massimo relativo ed in $x=8$ ammette un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x-16)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{50}{(x-3)^3}$$

perciò $g''(x) > 0$ se e solo se $x > 3$. La funzione è dunque concava su $(3,+\infty)$ e convessa su $(-\infty,3)$. Non ammette punti di flesso.

4. g è definita, continua e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Il numeratore è positivo per $x<-2$ e per $x>-1$, mentre il denominatore è positivo per $x>2$. Quindi la funzione è positiva per $x>2$ e per $x\in]-2,-1[$, si annulla in $x=-1$ e $x=-2$, ed è negativa altrove.

Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty,$$

mentre dallo studio del segno si ha che

$$\lim_{x\to 2^\pm} g(x) = \left[\frac{12}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

Sul dominio la derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(2x+3)(x-2)-(x^2+3x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-8}{(x-2)^2}.$$

Limitatamente al dominio di definizione, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-4x-8 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} <0, & \text{se } x\in]2-2\sqrt{3},2[\cup]2,2+2\sqrt{3}[, \\ =0, & \text{se } x=2-2\sqrt{3} \text{ oppure } x=2+2\sqrt{3}, \\ >0, & \text{se } x\in]-\infty,2-2\sqrt{3}[\cup]2,2+2\sqrt{3}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-\infty, 2-2\sqrt{3}[$ e su $]2, 2+2\sqrt{3}[$, decrescente su $]2-2\sqrt{3}, 2[$ e su $]2, 2+2\sqrt{3}[$. In $x = 2-2\sqrt{3}$ ammette un massimo relativo, in $x = 2+2\sqrt{3}$ ammette un minimo relativo.

Sul dominio la derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x-8)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{24}{(x-2)^3}$$

Ne deriva facilmente che la funzione è concava su $]-\infty, 2[$ e convessa su $]2, +\infty[$.

5. g è definita per tutti gli $x > 0$. Sul dominio g è sempre positiva tranne che in $x = 1$ dove si annulla; tale punto risulta allora banalmente un minimo assoluto per la funzione. Si ha inoltre (per il primo vedere i limiti fondamentali)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \log^2 x + x \cdot \frac{2\log x}{x} = \log^2 x + 2\log x = \log x(\log x + 2).$$

Si ha che $\log x \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$ mentre $\log x + 2 \geq 0$ se e solo se $x \geq e^{-2}$. Quindi la derivata prima è

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } e^{-2} < x < 1, \\ = 0, & \text{se } x = e^{-2} \text{ oppure } x = 1 \\ > 0, & \text{se } 0 < x < e^{-2} \text{ oppure } x > 1. \end{cases}$$

Allora la funzione è decrescente su $(e^{-2}, 1)$ e crescente su $(0, e^{-2})$ e $(1, +\infty)$. In $x = e^{-2}$ ammette un massimo relativo ed in $x = 1$ ammette un minimo relativo (ed assoluto).

La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{2\log x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\log x + 1)$$

perciò (sul dominio) $g''(x) \geq 0$ se e solo se $\log x + 1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1/e$. La funzione è dunque concava su $(0, 1/e)$ e convessa su $(1/e, +\infty)$. In $x = 1/e$ ammette un punto di flesso.

6. g è definita, continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

La funzione è positiva se $2x^2 + x + 1 > 0$ ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = (4x+1)e^x + (2x^2+x+1)e^x = (2x^2+5x+2)e^x.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2+5x+2 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-2, -1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = -1/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -2[\cup]-1/2, +\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-2, -1/2[$, crescente su $]-\infty, -2[$ e su $]-1/2, +\infty[$. In $x=-2$ ammette un massimo relativo, in $x=-1/2$ ammette un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$g''(x) = (4x+5)e^x + (2x^2+5x+2)e^x = (2x^2+9x+7)e^x.$$

Quindi $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2+9x+7 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-7/2, -1[, \\ = 0, & \text{se } x = -7/2 \text{ oppure } x = -1, \\ > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -7/2[\cup]-1, +\infty[. \end{cases}$$

In conclusione funzione è concava su $]-7/2, -1[$ e convessa su $]-\infty, -7/2[$ e su $]-1, +\infty[$. In $x=-1$ e $=-7/2$ la funzione ha due flessi.

7. Le condizioni d'esistenza sono $x > 0$ e $x \neq 1$ (per cui si annulla il logaritmo). Dunque il Dominio è $\mathcal{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Sul dominio g è continua e derivabile.

Considerato il dominio, si ha $g(x) \geq 0$ se e solo se $\log x \geq 0$ ovvero per ogni $x \geq 1$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{(usare l'Hopital)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\log x - x\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $\log x \geq 1$ ovvero $x \geq e$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0,1[\cup]1,e[, \\ = 0, & \text{se } x = e, \\ > 0, & \text{se } x \in]e,+\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]0,1[$ e su $]1,e[$, crescente su $]e,+\infty[$. In $x = e$ ammette un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\log x)^2 - (\log x - 1)\frac{2\log x}{x}}{(\log x)^4} = \frac{2 - \log x}{x(\log x)^3}$$

Il numeratore è positivo se $2 - \log x \geq 0$ ovvero $x \leq e^2$, il denominatore quando $\log x > 0$ ovvero $x > 1$. Si ottiene

$$g''(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]0,1[\cup]e^2,+\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = e^2, \\ > 0, & \text{se } x \in]1,e^2[. \end{cases}$$

In conclusione la funzione è concava su $]0,1[$ e su $]e^2,+\infty[$, e convessa su $]1,e^2[$. In $x = e^2$ la funzione ha un flesso.

8. La condizioni d'esistenza è $2x + 1 \neq 0$. Dunque il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. Sul dominio g è continua e derivabile.

La funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, perciò $g(x) > 0$ se e solo se $2x + 1 > 0$ ovvvero $x > -1/2$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = +\infty \text{ (usare l'Hopital)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to(-1/2)^-} g(x) = \left[\frac{e^{-1/2}}{0^-}\right] = -\infty, \qquad \lim_{x\to(-1/2)^+} g(x) = \left[\frac{e^{-1/2}}{0^+}\right] = +\infty.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{e^x}{2x+1} + e^x\left(-\frac{2}{(2x+1)^2}\right) = e^x\frac{2x-1}{(2x+1)^2}.$$

Si ha $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq 1/2$. Ricordandosi del dominio si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty,-1/2[\cup]-1/2,1/2[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/2, \\ > 0, & \text{se } x \in]1/2,+\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-\infty,-1/2[$ e su $]-1/2,1/2[$, crescente su $]1/2,+\infty[$. In $x=1/2$ ammette un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$g''(x)=e^x\,\frac{2x-1}{(2x+1)^2}+e^x\,\frac{2(2x+1)^2-(2x-1)2(2x+1)2}{(2x+1)^4}=e^x\,\frac{4x^2-4x+5}{(2x+1)^3}.$$

Il numeratore è sempre positivo (perché il Δ dell'equazione di secondo grado è negativo) quindi $g''(x)>0$ se e solo se $(2x+1)^3>0$ ovvero $x>-1/2$. Si ottiene

$$g''(x)\begin{cases} <0, & \text{se } x\in]-\infty,-1/2[,\\ >0, & \text{se } x\in]-1/2,+\infty[,\end{cases}$$

In conclusione la funzione è concava su $]-\infty,-1/2[$, convessa su $]-1/2,+\infty[$.