19. Applicazioni del calcolo differenziale: esercizi

Esercizio 19.23. *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti,*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\operatorname{sen}x+x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2\sin x)-\tan(3x)}{\mathrm{e}^{5x}-1}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\log(1+x)}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{7x}+3x^2}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-1+\cos x}{x^2-2\sin(x^2)}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-x}{\mathrm{e}^{2x}-3x-1}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\,\mathrm{e}^{2x}-\sin x}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)+\pi\log x}{(x-1)^2}$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)-3x^2}{\cos(3x)-\cos(5x)}$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\cos(5x)-3x}{\sin(3x)}$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-\cos x-\sin(3x)}{4x^2}$;
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\mathrm{e}^{x}+3\sin x}{\tan x}$;
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)-\cos x+\mathrm{e}^{x}}{\sin(4x)}$;
14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(3+5x)}{\sqrt{x^2+1}}$;
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-3x}{x^3}$;
16. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\cos(x^2)}{\sin x}$;
17. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3\sin x)-4x}{5\,\mathrm{e}^{2x}-7\cos x+2}$;
18. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2\sin x}-\cos(3x)+5x}{4\ln(1+x)-3x^2}$;
19. $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{3\sin x+\cos(5x)+1}{x^2-\pi x}$;
20. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{3t^2\cos t-\ln(\mathrm{e}^{t}+t)}{2t-5\sin t}$;
21. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{3\sin x}-3\,\mathrm{e}^{x}+2}{x\sin(2x)+3x^2}$;
22. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\operatorname{sen}x+x^2}$.

$\boxed{R}$ *1.* Il limite si presenta nella forma $0/0$. Applicando due volte l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \operatorname{sen} x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\, e^{x^2} + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x + 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\, e^{x^2} + 4x^2\, e^{x^2} + \cos x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x + 2} = \frac{3}{4}.$$

Il teorema dell'Hôpital non è indispensabile per la risoluzione dell'esercizio, che si potrebbe alternativamente svolgere nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \operatorname{sen} x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 1} = \frac{1 + 1/2}{1+1} = \frac{3}{4}.$$

2. Si può applicare l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cos x(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}.$$

3. Si può applicare l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2\sin x) - \tan(3x)}{e^{5x} - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos x}{1+2\sin x} - \frac{3}{\cos^2(3x)}}{5\, e^{5x}} = \left[\frac{2-3}{5}\right] = -\frac{1}{5}.$$

4. Si può applicare l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \log(1+x)}{e^{3x} - e^{7x} + 3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos \log(1+x)}{1+x}}{3\, e^{3x} - 7\, e^{7x} + 6x} = \left[\frac{1}{3-7+0}\right] = -\frac{1}{4}.$$

5. Si può applicare l'Hopital due volte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 1 + \cos x}{x^2 - 2\sin(x^2)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x - \sin x}{2x - 4x\cos(x^2)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6 - \cos x}{2 - 4\cos(x^2) + 8x^2 \sin(x^2)}$$
$$= \left[\frac{6-1}{2-4+0}\right] = -\frac{5}{2}.$$

6. Si può applicare l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - x}{e^{2x} - 3x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x - 1}{2\, e^{2x} - 3} = -2.$$

7. Si può applicare l'Hopital due volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\,e^{2x}-\sin x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{e^{2x}+2x\,e^{2x}-\cos x}$$
$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x}{4\,e^{2x}+4x\,e^{2x}+\sin x}=\frac{2-0}{4+0+0}=\frac{1}{2}.$$

8. Applicando l'Hopital due volte:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)+\pi\log x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)+\frac{\pi}{x}}{2(x-1)}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)+\frac{1}{x}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)-\frac{1}{x^2}}{1}=-\frac{\pi}{2}.$$

9. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$) due volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)-3x^2}{\cos(3x)-\cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)2x-6x}{\sin(5x)5-\sin(3x)3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x^2)4x^2+\cos(x^2)2-6}{\cos(5x)25-\cos(3x)9}=-\frac{1}{4}.$$

10. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(5x)-3x}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}2+\sin(5x)5-3}{\cos(3x)3}=\frac{2+0-3}{3}=-\frac{1}{3}.$$

11. Si può applicare due volte de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos x-\sin(3x)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,e^{3x}+\sin x-3\cos(3x)}{8x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\,e^{3x}+\cos x+9\sin(3x)}{8}=\frac{9+1+0}{8}=\frac{5}{4}.$$

12. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-e^{x}+3\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)-e^{x}+3\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{0-1+3}{1}=2.$$

13. Si può applicare l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)-\cos x+e^{x}}{\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{1+5x}+\sin x+e^{x}}{4\cos(4x)}=\frac{5+0+1}{4}=\frac{3}{2}.$$

14. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+5x)}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{3+5x}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sqrt{x^2+1}}{5x^2+3x}$$
$$=5\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{(5x^2+3x)^2}}=0.$$

15. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-3}{3x^2}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty.$$

16. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\cos(x^2)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2x}\,2+\sin(x^2)2x}{\cos x}=\left[\frac{2+0}{1}\right]=2.$$

17. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3\sin x)-4x}{5\,\mathrm{e}^{2x}-7\cos x+2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-3\cos x}{1-3\sin x}-4}{10\,\mathrm{e}^{2x}+7\sin x}=\left[\frac{-3-4}{10+0}\right]=-\frac{7}{10}.$$

18. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2\sin x}-\cos(3x)+5x}{4\ln(1+x)-3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2\sin x}\,2\cos x+3\sin(3x)+5}{4\frac{1}{1+x}-6x}=\frac{7}{4}.$$

19. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{3\sin x+\cos(5x)+1}{x^2-\pi x}=\left[\frac{0-1+1}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}\frac{3\cos x-5\sin(5x)}{2x-\pi}=-\frac{3}{\pi}.$$

20. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{t\to0}\frac{3t^2\cos t-\ln(\mathrm{e}^t+t)}{2t-5\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{6t\cos t-3t^2\sin t-\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t+t}}{2-5\cos t}=\frac{0-0-2}{2-5}=\frac{2}{3}.$$

21. Il limite si presenta nella forma d'indecisione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{3\sin x}-3\,\mathrm{e}^x+2}{x\sin(2x)+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{3\sin x}\,3\cos x-3\,\mathrm{e}^x}{\sin(2x)+2x\cos(2x)+6x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{3\sin x}\,9\cos^2x-\mathrm{e}^{3\sin x}\,3\sin x-3\,\mathrm{e}^x}{2\cos(2x)+2\cos(2x)-4x\sin(2x)+6}=\frac{9-0-3}{2+2-0+6}=\frac{3}{5}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora 3/5.

22. Il limite si presenta nella forma 0/0. Applicando due volte l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\operatorname{sen} x+x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\,e^{x^2}+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+x\cos x+2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{x^2}+4x^2\,e^{x^2}+\cos x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x+2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Il teorema dell'Hôpital non è indispensabile per la risoluzione dell'esercizio, che si potrebbe alternativamente svolgere nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\operatorname{sen} x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1}=\frac{1+1/2}{1+1}=\frac{3}{4}.$$

Esercizio 19.26. *Calcolare i limiti*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\beta\cos x}{x\operatorname{sen} x+2(\beta-1)}$,

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos x-2\operatorname{sen} x}{1-\beta\cos x}$,

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x-3x^2}{\beta-\cos x}$,

nei casi $\beta=2$ *e* $\beta=1$.

$\boxed{R}$ *1.* Se $\beta=2$ il limite non è in forma indeterminata e vale $-1/2$. Se $\beta=1$ il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0 e si può applicare due volte il teorema dell'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\cos x}{x\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=1.$$

2. Se $\beta=2$ il limite non è in forma indeterminata e vale 0. Se $\beta=1$ il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0 e applicando due volte il teorema dell'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos x-2\operatorname{sen} x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{2x}+\operatorname{sen} x-2\cos x}{\operatorname{sen} x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\,e^{2x}+\cos x+2\operatorname{sen} x}{\cos x}=5.\end{aligned}$$

3. Se $\beta=2$ il limite non è in forma indeterminata e vale 0. Se $\beta=1$ il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0 e si verifica che valgono le ipotesi del teorema dell'Hôpital. Si ha dunque, applicandolo due volte

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x-3x^2}{1-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x+x\cos x-6x}{\mathrm{sen}\,x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x-6}{\cos x}=-4.\end{aligned}$$

Alternativamente si poteva dividere subito per x^2 ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x-3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}-3}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1-3}{1/2}=-4.$$

Esercizio 19.27. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\,\mathrm{e}^{\sin x}-3\cos x+1+\alpha}{(x-\alpha)^2-\alpha\sin(x^2)-\alpha}$$

nel caso $\alpha=1$ *e per ogni* $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\boxed{R}$ Sostituendo $\alpha=1$ si ottiene il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-3\cos x+2}{(x-1)^2-\sin(x^2)-1}$$

che si presenta nella forma d'indecisione $\frac{0}{0}$. Applicando la regola di de L'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-3\cos x+2}{(x-1)^2-\sin(x^2)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x+3\sin x}{2(x-1)-2x\cos(x^2)}=\frac{1+0}{-2-0}=-\frac{1}{2}.$$

Il limite richiesto vale dunque $-1/2$.

Nel caso generale $\alpha\in\mathbb{R}$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\,\mathrm{e}^{\sin x}-3\cos x+1+\alpha}{(x-\alpha)^2-\alpha\sin(x^2)-\alpha}=\left[\frac{\alpha-3+1+\alpha}{\alpha^2-0-\alpha}\right]=\left[\frac{2\alpha-2}{\alpha^2-\alpha}\right]$$

Il limite è dunque un numero reale (che, semplificato, coincide con $\frac{2}{\alpha}$) tranne nel caso in cui il denominatore $\alpha^2-\alpha$ si annulla. Ciò avviene quando $\alpha=1$ opppure $\alpha=0$. Il caso $\alpha=1$ è già stato considerato. Se invece $\alpha=0$, si ottiene il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+1}{x^2}=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty.$$

Ricapitolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha\,\mathrm{e}^{\sin x} - 3\cos x + 1 + \alpha}{(x-\alpha)^2 - \alpha\sin(x^2) - \alpha} = \begin{cases} 2/\alpha & \text{se } \alpha \neq 1,\ \alpha \neq 0 \\ -1/2 & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Esercizio 19.28. *Calcolare i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni*

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x+3x^2}$ *di ordine* 3 *in* $x_0 = 0$;
2. $f(x) = \ln(1 - 2x\,\mathrm{e}^x)$ *di ordine* 2 *in* $x_0 = 0$;
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ *di ordine* 3 *in* $x_0 = 2$;
4. $f(x) = \sin(2x - x^3)$ *di ordine* 3 *in* $x_0 = 0$.

$\boxed{R}$ *1.* Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{x+3x^2}(1+6x), \\ f''(x) &= \mathrm{e}^{x+3x^2}(1+6x)^2 + 6\,\mathrm{e}^{x+3x^2}, \\ f'''(x) &= \mathrm{e}^{x+3x^2}(1+6x)^3 + 18\,\mathrm{e}^{x+3x^2}(1+6x). \end{aligned}$$

Quindi $h(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 7$, $f'''(0) = 19$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{19}{6}x^3.$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x}{1 - 2x\,\mathrm{e}^x} = 2\frac{\mathrm{e}^x(1+x)}{2x\,\mathrm{e}^x - 1} \\ f''(x) &= 2\frac{(\mathrm{e}^x(1+x) + \mathrm{e}^x)(2x\,\mathrm{e}^x - 1) - \mathrm{e}^x(1+x)(2\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x)}{(2x\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\ &= \frac{-(4+x)\,\mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{e}^{2x}}{(2x\,\mathrm{e}^x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = -2$, $f''(0) = -8$ e il polinomio di Taylor è

$$P_2(x) = -2x + \frac{-8}{2}x^2 = -2x - 4x^2.$$

3. Si ha

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad f''(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad f'''(x) = 8\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Quindi $f(2) = \mathrm{e}^4$, $f'(2) = 2\,\mathrm{e}^4$, $f''(2) = 4\,\mathrm{e}^4$, $f'''(2) = 8e^4$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = \mathrm{e}^4 + 2\,\mathrm{e}^4(x-2) + \frac{4\,\mathrm{e}^4}{2}(x-2)^2 + \frac{8\,\mathrm{e}^4}{6}(x-2)^3.$$

4. Si ha

$$\begin{aligned}
&f'(x) = (2-3x^2)\cos(2x-x^3)\\
&f''(x) = -(2-3x^2)^2\sin(2x-x^3) - 6x\cos(2x-x^3)\\
&f'''(x) = [-(2-3x^2)^3 - 6]\cos(2x-x^3) + 18x(2-3x^2)\sin(2x-x^3)
\end{aligned}$$

Quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -14$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 2x + \frac{-14}{6}x^3 = 2x - \frac{7}{3}x^3.$$