18. Calcolo differenziale: esercizi

Esercizio 18.7. *Determinare, se non espressamente indicato, il dominio delle seguenti funzioni e studiarne la continuità e la derivabilità.*

1. $f(x) = \log_{\sqrt{x}}(x\,\mathrm{e}^x)$;

2. $f(x) = x^x, \quad x \in]0, +\infty[$;

3. $f(x) = x^{(x^x)}, \quad x \in]0, +\infty[$;

4. $f(x) = (x^x)^x, \quad x \in]0, +\infty[$;

5. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$.

$\boxed{R}$ *1.* Può tornare comodo scriversi l'espressione della funzione passando alla base naturale con la formula del cambiamento di base:

$$f(x) = \frac{\log(x\,\mathrm{e}^x)}{\log\sqrt{x}} = 2\frac{\log x + x}{\log x} = 2 + \frac{2x}{\log x}.$$

Il dominio è l'insieme $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. La funzione è continua e derivabile in D. Si ha

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left(2 + \frac{2x}{\log x}\right) = 2\frac{\log x - 1}{\log^2 x}.$$

2. Essendo $x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$, la funzione è continua e derivabile nel suo dominio $]0, +\infty[$. Si ha

$$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x\log x} = x^x(\log x + 1).$$

3. Essendo $x^{(x^x)} = \mathrm{e}^{x^x \log x}$ la funzione è continua e derivabile nel suo dominio $]0, +\infty[$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^{(x^x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{x^x\log x}\right) = x^{x^x}\left[x^x(\log x + 1)\log x + x^x\frac{1}{x}\right]\\ &= x^{x^x}x^x\left(\log^2 x + \log x + \frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

5. Dovendo essere $\operatorname{sen} x > 0$ il dominio è $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$. La funzione è continua e derivabile in D e si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen} x)^{\cos x}\right) &= \frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^{\cos x \log \operatorname{sen} x}\\ &= (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x + \cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 18.10. *Date le funzioni* $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ *con legge*

1. $f(x) = \begin{cases} 1+3x & \text{se } x < 0 \\ 6\,\mathrm{e}^x + a & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$ *2.* $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{se } x < 0 \\ x^3 + a & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ a\sqrt[4]{x} & \text{se } x > 1, \end{cases}$ *4.* $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \alpha + \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{se } x < 1 \\ -\log x & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$ *6.* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{se } x \leq 0 \\ x^a & \text{se } x > 0, \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} a^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{se } x > 0, \end{cases}$ *8.* $f(x) = \begin{cases} \log(1-x) & \text{se } x \leq -2 \\ a - 2x & \text{se } x > -2, \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 1 + ax^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + x^3 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ *10.* $f(x) = \begin{cases} ax^4 & \text{se } x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } x > -1, \end{cases}$

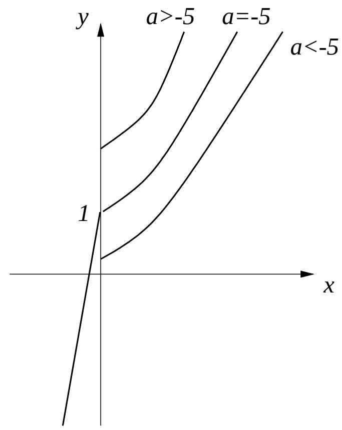
a. dire per quali valori di a *la funzione è invertibile; b. per il rispettivo valore del parametro*

1. $a = 1$; *2.* $a = 2$; *3.* $a = 2$; *4.* $a = 1$; *5.* $a = -1$;

6. $a = 1/2$; *7.* $a = \mathrm{e}$; *8.* $a = -3$; *9.* $a = -2$; *10.* $a = -2$

dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; c. determinare per quali valori di a*, se ne esistono,* f *è continua in* $\mathbb{R}$*; d. determinare per quali valori di* a*, se ne esistono,* f *è derivabile in* $\mathbb{R}$*.*

$\boxed{R}$ *1.a.* Conviene distinguere alcuni casi (vedi figura):



Come si vede, la funzione risulta iniettiva, e quindi invertibile, per ogni $a \geq -5$.
1.b. Per $a = 1$ la funzione è invertibile. Per determinare la legge della funzione inversa occorre risolvere le equazioni

$$y = 1 + 3x \text{ per } x < 0$$

e

$$y = 6\,\mathrm{e}^x + 1 \text{ per } x \geq 0.$$

Avendosi

$$\begin{aligned} y = 1 + 3x \text{ per } x < 0 \quad &\iff \quad x = \frac{y-1}{3} \text{ per } \frac{y-1}{3} < 0 \\ &\iff \quad x = \frac{y-1}{3} \text{ per } y < 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y = 6\,\mathrm{e}^x + 1 \text{ per } x \geq 0 \quad &\iff \quad \mathrm{e}^x = \frac{y-1}{6} \text{ per } x \geq 0 \quad \iff \\ x = \log\frac{y-1}{6} \text{ per } \log\frac{y-1}{6} \geq 0 \quad &\iff \quad x = \log\frac{y-1}{6} \text{ per } \frac{y-1}{6} \geq 1 \\ &\iff \quad x = \log\frac{y-1}{6} \text{ per } y \geq 7 \end{aligned}$$

allora $f^{-1} :]-\infty, 1[\cup [7, +\infty[\to \mathbb{R}$ con legge

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{3} & \text{se } y < 1 \\ \log\dfrac{y-1}{6} & \text{se } y \geq 7 \end{cases}$$

1.c. Per come è definita, la funzione è continua per ogni $x \neq 0$ qualunque sia a. Per decidere per quali valori di a risulta continua anche nel punto $x = 0$ occorre calcolare (se esiste) il $\lim_{x \to 0} f(x)$ e confrontarlo con $f(0)$. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 6\,\mathrm{e}^x + a = 6 + a$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 + 3x = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

allora il limite per $x \to 0$ esiste ed è uguale a $f(0) = 6 + a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $6 + a = 1$, cioè $a = -5$ e pertanto f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ solo per $a = -5$.
1.d. Possiamo restrigerci a considerare solo il caso $a = -5$ perchè per $a \neq -5$ la f non essendo continua nel punto $x = 0$ non è neppure derivabile. Sia dunque $a = -5$. Per come è definita, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 6\,\mathrm{e}^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale in 0 da sinistra e da destra. Avendosi

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{3h}{h} = 3,$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{6(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = 6,$$

allora f non è derivabile nel punto $x = 0$ e quindi non esiste alcun valore di a tale che f sia derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$.

2.a. $a \geq 1$.
2.b. Per $a = 2$ la funzione è invertibile e si ha

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{\log y}{2} & \text{se } 0 < y < 1 \\ \sqrt[3]{y - 2} & \text{se } y \geq 2. \end{cases}$$

2.c. $a = 1$.
2.d. Non esistono.

3.a. $a \geq 1$.
3.b. $f^{-1} :]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{se } y \leq 1 \\ (y/2)^4 & \text{se } y > 2. \end{cases}$$

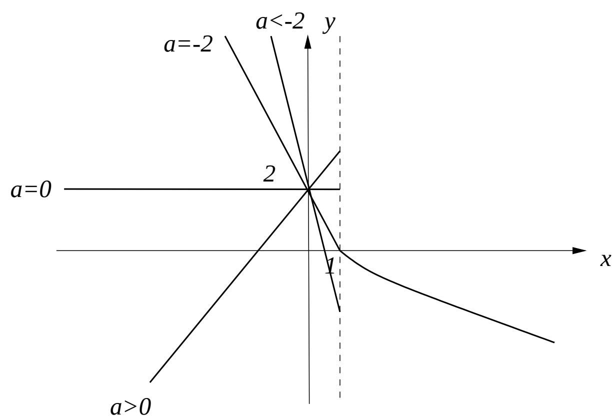
3.c. $a = 1$.
3.d. Non esistono.

4.a. $\alpha \geq 0$.
4.b. per $\alpha = 1$ la funzione è invertibile e si ha

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y < 0 \\ tg(y-1) & \text{se } 1 \leq y < 1 + \pi/2. \end{cases}$$

4.c. $\alpha = 0$.
4.d. $\alpha = 0$.

5.a. Conviene distinguere alcuni casi (vedi figura):



Come si vede, la funzione risulta iniettiva, e quindi invertibile, per ogni $-2 \leq a < 0$.
5.b. Per $a = -1$ la funzione è invertibile. Per determinare la legge della funzione inversa occorre risolvere le equazioni

$$y = -x + 2 \text{ per } x < 1 \quad \text{e} \quad y = -\log x \text{ per } x \geq 1.$$

Avendosi

$$y = -x+2 \text{ per } x < 1 \iff x = 2-y \text{ per } 2-y < 1 \iff x = 2-y \text{ per } y > 1,$$

$$y = -\log x \text{ per } x \geq 1 \iff x = \mathrm{e}^{-y} \text{ per } \mathrm{e}^{-y} \geq 1 \iff x = \mathrm{e}^{-y} \text{ per } y \leq 0,$$

allora $f^{-1} :]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ con legge

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2-y & \text{se } y > 1 \\ \mathrm{e}^{-y} & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

5.c. Per come è definita, la funzione è continua per ogni $x \neq 1$ qualunque sia a. Per decidere per quali valori di a risulta continua anche nel punto $x = 1$ occorre calcolare (se esiste) il $\lim_{x \to 11} f(x)$ e confrontarlo con $f(1)$. Poiché

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-\log x) = -\log 1 = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax + 2 = a + 2 \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

allora il limite per $x \to 1$ esiste ed è uguale a $0 = f(1)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $0 = a + 2$, cioè $a = -2$ e pertanto f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ solo per $a = -2$.

5.d. Possiamo restrigerci a considerare solo il caso $a = -2$ perchè per $a \neq -2$ la f non essendo continua nel punto $x = 1$ non è neppure derivabile. Sia dunque $a = -2$. Per come è definita, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 1$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 1 \\ -1/x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x = 1$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale in 1 da sinistra e da destra. Avendosi

$$\lim_{h \to 1^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 1^-} \frac{-2h}{h} = -2,$$

$$\lim_{h \to 1^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 1^+} \frac{-\log(1+h)}{h} = -1,$$

allora f non è derivabile nel punto $x = 1$ e non esiste alcun valore di a tale che f sia derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

6.a. $a \neq 0$.
6.b. $f^{-1} :]-\pi/2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \operatorname{tg} y & \text{se } -\pi/2 < y \leq 0 \\ y^2 & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

6.c. $a \neq 0$.
6.d. $a = 1$.

7.a. $a > 1$.
7.b. si. $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \log y & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ y^2 - 1 & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

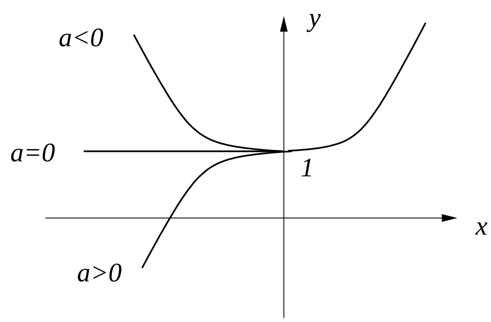
7.c. $a > 0$.
7.d. $a = \sqrt{\mathrm{e}}$.

8.a. È invertibile per ogni $a \leq \log 3 - 4$.
8.b. Per $a = -3$ la funzione è invertibile con $f^{-1} :]-\infty, 1[\cup [\log 3, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^y & \text{se } y \geq \log 3 \\ -(y+3)/2 & \text{se } y < 1. \end{cases}$$

8.c. $a = \log 3 - 4$.
8.d. Non esistono.

9.a. Conviene distinguere alcuni casi (vedi figura):



Come si vede, la funzione risulta iniettiva, e quindi invertibile, per ogni $a < 0$.
9.b. Per $a = -2$ la funzione è invertibile. Per determinare la legge della funzione inversa occorre risolvere le equazioni

$$y = 1 + x^3 \text{ per } x > 0$$

e

$$y = -2x^2 + 1 \text{ per } x \leq 0.$$

Avendosi

$$\begin{aligned} y = 1 + x^3 \text{ per } x > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-1} \text{ per } \sqrt[3]{y-1} > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y-1} \text{ per } y > 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y = -2x^2 + 1 \text{ per } x \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1-y}{2} \text{ per } x \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1-y}{2} \text{ per } y \leq 1 \end{aligned}$$

allora $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con legge

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y-1} & \text{se } y > 1 \\ \dfrac{1-y}{2} & \text{se } y \leq 1. \end{cases}$$

9.c. Per come è definita, la funzione è continua per ogni $x \neq 0$ qualunque sia a. Per decidere per quali valori di a risulta continua anche nel punto $x = 0$ occorre calcolare (se esiste) il $\lim_{x\to 0} f(x)$ e confrontarlo con $f(0)$. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + x^3 = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^2 + 1 = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

allora il limite per $x \to 0$ esiste ed è uguale a $1 = f(1)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e pertanto f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ qualunque sia $a \in \mathbb{R}$.

9.d. Per come è definita, la funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x > 0 \\ 2ax & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale in 0 da sinistra e da destra. Avendosi

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah^2}{h} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{h} = 0,$$

allora f è derivabile anche nel punto 0 e quindi in tutti i punti di $\mathbb{R}$ qualunque sia $a \in \mathbb{R}$.

10.a. $a \leq -1$.
10.b. $f^{-1} :]-\infty, -2] \cup]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt[4]{-y/2} & \text{se } y \leq -2 \\ y^3 & \text{se } y > -1. \end{cases}$$

10.c. $a = -1$. *10.d.* Non esistono.

Esercizio 18.11. *Date le funzioni*

1. $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 2^{-x+1} & \textit{se } x \leq -1 \\ 2 - \alpha x & \textit{se } x > -1, \end{cases}$$

2. $f :]0, +\infty[\to f(]0, +\infty[)$,

$$f(x) = \begin{cases} \log x - \alpha & \textit{se } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \textit{se } x > 1, \end{cases}$$

a. determinare i valori di α per cui la funzione è invertibile; b. dire se per $\alpha = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; c. determinare per quali α, se ne esistono, f è continua nel dominio; d. determinare per quali α, se ne esistono, f è derivabile nel dominio.

$\boxed{R}$ *1.a.* $\alpha = 2/3$; *1.b.* non esistono; *1.c.* f è invertibile per $\alpha > 2/3$ o $\alpha < 0$; *1.d.* $f^{-1}(y) = 2 - \log_2 y$ se $y \geq 0$ e $f^{-1}(y) = 1 - y/2$ se $y < 4$.

2.a. $a \geq 0$.
2.b. $f^{-1} :]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[\to]0, +\infty[$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} e^{y+2} & \text{se } y \leq -2 \\ 1 + \sqrt{y} & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

2.c. $a = 0$. *2.d.* Non esistono.

Esercizio 18.12. *Si consideri la funzione $f :]-\infty, \pi/2[\to f(]-\infty, \pi/2[)$ con legge*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \textit{se } x < 0 \\ \operatorname{tg} x & \textit{se } 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. 1. Dire per quali valori di a la funzione è invertibile; 2. dire se per $a = -1$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa e tracciarne un grafico approssimativo; 3. determinare per quali a, se ne esistono, f è continua nel dominio; 4. determinare per quali a, se ne esistono, f è derivabile nel dominio.

$\boxed{R}$ *1.* $a \leq 0$.
2. Per $a = -1$ la funzione è invertibile e si ha

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{2} & \text{se } y < -1 \\ \operatorname{arctg} y & \text{se } y \geq 0. \end{cases}$$

3. $a = 0$. *4.* Non esistono.