17. Zeri di una funzione continua: esercizi

Esercizio 17.4. *Dimostrare che le seguenti equazioni*

1. $e^x \sqrt[3]{x} = 1,$ *2.* $2^x + x = 0,$

3. $3^{-x} = x^3 + 2x,$ *4.* $x(1 - 2^{-x}) = 1 - \sqrt{x},$

hanno un'unica soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$ *e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a* $1/8$. *Giustificare tutti i passaggi senza fare uso del calcolatore.*

$\boxed{R}$ *1.* L'equazione si può scrivere nella forma equivalente

$$f(x) := \sqrt[3]{x} - e^{-x} = 0$$

dove la funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (come somma di funzioni strettamente crescenti). Poichè $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 - 1/e > 0$, allora l'esistenza di una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $]0, 1[$ segue dal teorema degli zeri; l'unicità segue poi dal fatto che f è strettamente monotona e quindi iniettiva. Inoltre

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{e}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta

$$f(\frac{1}{2}) > 0$$

poichè

$$\sqrt{e} - \sqrt[3]{2} > 0 \iff \sqrt{e} > \sqrt[3]{2} \iff e > 2^{2/3} \iff e^3 > 2^2 \iff e^3 > 4$$

che è vero in quanto $e > 2$ e quindi $e^3 > 2^3 > 8$. Ne consegue che $x_0 \in]0, 1/2[$. Proseguendo,

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}} = \frac{\sqrt[4]{e} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt{e}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta
$$f(\frac{1}{4}) < 0$$
poichè
$$\sqrt[4]{\mathrm{e}} - \sqrt[3]{4} < 0 \iff \sqrt[4]{\mathrm{e}} < \sqrt[3]{4} \iff e < 4^{4/3} \iff \mathrm{e}^3 < 2^8 = 256$$
che è vero in quanto $\mathrm{e} < 3$ e quindi $\mathrm{e}^3 < 3^3 = 27$. Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 1/4[$. Assumendo $3/8$ come valore approssimato per x_0 si commette un errore inferiore ad $1/8$.

2. Detta $f(x) = 2^x + x$ si ha che f è continua su $\mathbb{R}$ e poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ allora per il teorema degli zeri esiste, in $\mathbb{R}$, una soluzione x_0 dell'equazione che è anche unica poichè f è strettamente crescente (in quanto somma di due funzioni strettamente crescenti).

Poiché $f(0) = 1$ e $f(-1) = -1/2$ allora $x_0 \in]-1, 0[$. Poiché $f(-1/2) = (\sqrt{2} - 1)/2 > 0$ allora $x_0 \in]-1, -1/2[$. Poichè $f(-3/4) = \dfrac{4 - 3 \cdot 2^{3/4}}{4 \cdot 2^{3/4}} < 0$ allora $x_0 \in]-3/4, -1/2[$ e quest'ultimo intervallo ha ampiezza $1/4$, sicché prendendone il punto medio $-5/8$ come valore approssimato per x_0 l'errore commesso è inferiore a $1/8$.

3. Osserviamo anzitutto che, posto $f(x) = 3^{-x} - x^3 - 2x$, l'equazione è equivalente a $f(x) = 0$. Poichè f è strettamente decrescente (in quanto somma di funzioni decrescenti) essa è iniettiva e quindi può avere al più uno zero.

Inoltre f è continua su $\mathbb{R}$ e $f(0) = 1$ mentre $f(1) = -8/3 < 0$, quindi per il teorema degli zeri esiste uno zero di f, x_0, appartenente all'intervallo $]0, 1[$. Poichè
$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} - 1 < 0,$$
in quanto $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$, allora $x_0 \in]0, 1/2[$. Poiché
$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} = \frac{64 - 33\sqrt[4]{3}}{64\sqrt[4]{3}} > 0$$
allora $x_0 \in]1/4, 1/2[$ e pertanto $3/8$ è un valore approssimato di x_0 con un errore inferiore ad $1/8$.

Il fatto che $64 - 33\sqrt[4]{3} > 0$ si può vedere facilmente scrivendosi la disequazione nella forma equivalente
$$\frac{64}{33} > \sqrt[4]{3}$$

e osservando per esempio che $\frac{64}{33} > \frac{3}{2}$ e poi che $\frac{3}{2} > \sqrt[4]{3}$ in quanto $(\frac{3}{2})^4 > 3$.

4. Osserviamo che, posto $f(x) = x(1 - 2^{-x}) + \sqrt{x} - 1$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente crescente e continua in $[0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1/2$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi $f(1/2) = (1 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2}) < 0$ allora $x_0 \in]1/2, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/4$ e si ha poi

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3}{4 \cdot 2^{3/4}} > 0$$

Infatti, poiché il denominatore è positivo la disuguaglianza equivale a

$$2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3 > 0 \iff 2^{3/4}(2\sqrt{3} - 1) > 3 \iff 2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 3^4$$

che è vero, in quanto essendo $\sqrt{3} > 3/2$ allora

$$2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 2^3(3 - 1)^4 = 2^7 = 128 > 3^4 = 81.$$

Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 3/4[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 5/8$.

Esercizio 17.5. *Dimostrare, senza fare uso di calcolatori, che*

$$\log \frac{3}{4} > -\frac{1}{2}.$$

Dimostrare, poi, che l'equazione $\log x = 1 - 2x$ *ha un'unica soluzione* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/8$.

$\boxed{R}$ Si ha

$$\log \frac{3}{4} > -\frac{1}{2} \iff \frac{3}{4} > \mathrm{e}^{-1/2} \iff \frac{4}{3} < \mathrm{e}^{1/2} \iff \frac{16}{9} < \mathrm{e}$$

che è vero perchè

$$\mathrm{e} > 2 = \frac{16}{8} > \frac{16}{9}.$$

Osservato che la funzione $f(x) = \log x + 2x - 1$ è continua, e che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il Teorema degli Zeri esiste una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ che è anche unica poichè f è strettamente crescente.

Osservato che $f(1) = 1 > 0$ allora si ha $x_0 \in]0,1[$; poichè $f(1/2) = -\log 2 < 0$ allora si ha $x_0 \in]1/2,1[$; poichè $f(3/4) = \log(3/4) + 1/2 > 0$ allora si ha $x_0 \in]1/2,3/4[$ e un valore approssimato di x_0 con l'accuratezza richiesta è quindi $5/8$.

Esercizio 17.6. *Dimostrare che le seguenti equazioni*

1. $x^3 = 2^{-\sqrt{x+1}}$, *2.* $6^x = \dfrac{3}{2^x} - 5$,

3. $x^3 + \log_2(x+5) = 0$, *4.* $\log_2 x - 3\log_{1/2}(1+x) = 5$,

5. $\sqrt{\log_2 x} = 2 - x$, *6.* $5^{1/x} = \sqrt{x}$,

7. $\log(x+3) = (2-x)^3$, *8.* $(y^2-1)^3 = 2^{-|y|}$,

hanno un'unica soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$ *e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a* $1/4$. *Giustificare tutti i passaggi senza fare uso del calcolatore.*

$\boxed{R}$ *1.* L'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$ con

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2^{\sqrt{x+1}}}$$

che è definita sull'intervallo $[-1,+\infty[$, ivi continua e strettamente crescente. Inoltre

$$f(-1) = -2 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quindi il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di un punto $x_0 \in]-1,+\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ (cioè esiste una soluzione dell'equazione) e l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) assicura che x_0 è l'unico zero di f.

Poichè inoltre

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(1) = 1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

e $f(1) > 0$, perchè

$$1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} > 0 \iff 2^{\sqrt{2}} > 1 \iff \sqrt{2} > 0 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]0, 1[$.

Poichè $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0$ in quanto

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0 \iff 2^3 > 2^{\sqrt{3/2}} \iff 3 > \sqrt{3/2} \iff 9 > 3/2 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]1/2, 1[$ e assumendo $3/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$.

2. Posto $f(x) = 6^x - \frac{3}{2^x} + 5$ l'equazione si può scrivere nella forma $f(x) = 0$ le cui soluzioni sono tutti e soli gli zeri di f. Poichè f è strettamente crescente (come somma di funzioni crescenti di cui una strettamente) allora esiste al più uno zero.

Essendo $f(0) = 3 > 0$ e $f(-1) = -5/6 < 0$ allora per il teorema degli zeri esiste uno zero di f (unico per quanto osservato prima) in $]-1, 0[$.

Per calcolarne un valore approssimato con l'accuratezza desiderata applichiamo il metodo di bisezione. Consideriamo dunque

$$f(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{2} + 5$$

e proviamo che è strettamente positivo. Infatti

$$f(-1/2) > 0 \iff 5 > 3\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

e, osservato che il secondo membro è positivo, possiamo elevare tutto al quadrato ottenendo la disuguaglianza equivalente

$$25 > 18 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \iff \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{41}{6} > 0$$

che è vera. Dunque, detto x_0 la soluzione dell'equazione, si ha $x_0 \in]-1, -1/2[$, e pertanto un valore approssimato a meno di $1/4$ è $x_0 \simeq -3/4$.

3. Considerata la funzione $f(x) = x^3 + \log_2(x + 5)$, il problema consiste nel mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f :]-5, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e strettamente crescenti. Poiché

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione.

Avendosi $f(-1) = -1 + \log_2 4 = -1 + 2 = 1 > 0$ e $f(-2) = -8 + \log_2 3 < 0$ (in quanto $\log_2 3 < 8 \iff 3 < 2^8$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in]-2, -1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $-3/2$ e si ha poi

$$f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{7}{2} < -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{8}{2} = -\frac{27}{8} + 2 = -\frac{11}{8} < 0.$$

Ne consegue che $x_0 \in]-3/2, -1[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq -5/4$.

4. Considerata la funzione $f(x) = \log_2 x - 3\log_{1/2}(1 + x) - 5$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Osserviamo, per comodità di calcolo, che $\log_{1/2}(1 + x) = -\log_2(1 + x)$ (formula del cambiamento di base) e quindi

$$f(x) = \log_2 x + 3\log_2(1 + x) - 5.$$

Avendosi $f(1) = 3 - 5 < 0$ e $f(2) = 1 + 3\log_2 3 - 5 = 3\log_2 3 - 4 > 0$ (in quanto $3\log_2 3 > 4 \iff \log_2 3 > 4/3 \iff 3 > 2^{4/3} \iff 3^3 > 2^4 \iff 27 > 16$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in]1, 2[$.

Si ha poi

$$f(\frac{3}{2}) = \log_2 \frac{3}{2} + 3\log_2 \frac{5}{2} - 5 = \log_2 \frac{3 \cdot 5^3}{2^4} - 5 < 0,$$

infatti $\log_2 \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 5 \iff \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 2^5 \iff 3 \cdot 5^3 < 2^9 \iff 375 > 512$ che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]3/2, 2[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 7/4$.

5. Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{\log_2 x} - 2 + x$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(1) = -1 < 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché $f(2) = 1$ allora $x_0 \in]1, 2[$. Poiché

$$f(\tfrac{3}{2}) = \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} - 2 + \tfrac{3}{2} = \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} > 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} > \tfrac{1}{2} \iff \log_2 \tfrac{3}{2} > \tfrac{1}{4} \iff \tfrac{3}{2} > 2^{1/4} \iff$$

$$\iff \tfrac{3^4}{2^4} > 2 \iff 3^4 > 2^5 \iff 81 > 32$$

allora $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 5/4$.

6. Osserviamo che, posto $f(x) = 5^{1/x} - \sqrt{x}$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente decrescente e continua in $]0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e decrescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi

$$f(2) = \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$$

mentre

$$f(3) = \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} < 0,$$

infatti

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} \iff 5^2 < 3^3 \iff 25 < 27,$$

allora $x_0 \in]2, 3[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $5/2$ e si ha poi

$$f(\frac{5}{2}) = 5^{2/5} - (5/2)^{1/2} > 0$$

Infatti,

$$5^{2/5} > \tfrac{5^{1/2}}{2^{1/2}} \iff 2^{1/2}5^{2/5} > 5^{1/2} > 0 \iff 2 \cdot 5^{4/5} > 5$$

$$\iff 2^5 \cdot 5^4 > 5^5 \iff 2^5 > 5 \iff 32 > 5$$

che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]5/2, 3[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 11/4$.

7. Osserviamo che, posto $f(x) = \log(x+3) - (2-x)^3$, l'equazione data è equivalente all'equazione $f(x) = 0$. La funzione f è strettamente crescente e continua in $]-3, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]-3, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) è anche unico. Ne consegue che l'equazione data ha esattamente una soluzione. Per calcolarne un valore approssimato, osserviamo che

$$f(0) = \log 3 - 8 < 0$$

in quanto $\log 3 < \log 4 = 2 \log 2 < 2 \log \mathrm{e} = 2 < 8$. Allora $x_0 \in]0, +\infty[$. Poiché

$$f(1) = \log 4 - 1 > \log \mathrm{e} - 1 = 0,$$

allora $x_0 \in]0, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $1/2$ e l'errore che si commetterebbe approssimando x_0 con questo valore sarebbe inferiore a $1/2$, che è maggiore di $1/4$. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione dell'intervallo. Si ha

$$f(\frac{1}{2}) = \log(\frac{7}{2}) - \frac{27}{8} < 0.$$

Infatti

$$\log(\frac{7}{2}) < \log 4 = 2 \log 2 < 2 \log \mathrm{e} = 2 < \frac{27}{8}.$$

Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/4$ e l'errore che si commette approssimando x_0 con questo valore è inferiore a $1/4$. Pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 3/4$.

8. Osserviamo che posto $f(y) = 2^{-|y|} - (y^2 - 1)^3$ l'equazione data è equivalente all'equazione $f(y) = 0$. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è pari; si verifica infatti facilmente che $f(y) = f(-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi limitarci a studiare l'equazione in $[0, +\infty[$ osservando che se y_0 è una soluzione, allora lo è anche $-y_0$.

Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente decrescente e continua in $[0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e decrescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(0) = 2 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to +\infty} f(y) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $y_0 \in]0, +\infty[$ tale che $f(y_0) = 0$ che, per l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) è anche unico. Ne consegue che l'equazione data ha esattamente due soluzioni. Per calcolarne un valore approssimato osserviamo che

$$f(1) = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{mentre} \quad f(2) = \frac{1}{4} - 27 < 0,$$

allora $y_0 \in]1, 2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/2$ e l'errore che si commetterebbe approssimando y_0 con questo valore sarebbe inferiore a $1/2$, che è maggiore di $1/4$. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione dell'intervallo. Si ha

$$f(\frac{3}{2}) = 2^{-3/2} - (\frac{5}{4})^3 < 0.$$

Infatti, $2^{-3/2} - (\frac{5}{4})^3 < 0 \iff \frac{1}{2^{3/2}} < \frac{5^3}{2^6} \iff \frac{1}{2^3} < \frac{5^6}{2^{12}} \iff 2^9 < 5^6$, che è vero in quanto $5^6 > 4^6 = 2^{12} > 2^9$. Ne consegue che $y_0 \in]1, 3/2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $5/4$ e l'errore che si commette approssimando y_0 con questo valore è inferiore a $1/4$. Pertanto un valore di y_0 con l'approssimazione richiesta è $y_0 \simeq 5/4$. Un'approssimazione della soluzione $-y_0$, con la medesima accuratezza, è $-5/4$.

Esercizio 17.7. *Dimostrare che la funzione*

$$f(x) = 2x + 3\log_2(1 + x)$$

assume il valore 3 *in uno ed un sol punto* x_0. *Determinare un valore approssimato di* x_0 *con un errore inferiore a* 2^{-3}, *senza fare uso del calcolatore.*

$\boxed{R}$ Considerata la funzione $g(x) = f(x) - 3$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $g(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua. Poiché

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di g è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché

$$g(0) = -3 < 0, \quad g(1) = 2 + 3\log_2 2 - 3 = 3\log_2 2 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$$

allora $x_0 \in]0,1[$. Poiché

$$g(\tfrac{1}{2}) = 1 + 3\log_2 \tfrac{3}{2} - 3 = 3(\log_2 3 - 1) - 2 = 3\log_2 3 - 5 < 0 \iff$$
$$\iff \log_2 3 < \tfrac{5}{3} \iff 3 < 2^{5/3} \iff 3^3 < 2^5 \iff 27 < 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$. Poiché

$$g(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{2} + 3\log_2 \tfrac{7}{4} - 3 = 3\log_2 7 - 2 + \tfrac{3}{2} - 3 = 3\log_2 7 - \tfrac{15}{2} > 0 \iff$$
$$\iff \log_2 7 > \tfrac{5}{2} \iff 7 > 2^{5/2} \iff 7^2 > 2^5 \iff 49 > 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq \frac{5}{8}$.

Esercizio 17.8. *Data la funzione* $f(x) = x^3 \log(1 + x^2)$,

1. *dire se è pari o dispari;*
2. *studiarne l'andamento di monotonia;*
3. *dimostrare che l'equazione*

$$f(x) = 1$$

ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$, *senza fare uso del calcolatore.*

$\boxed{R}$ *1.* f è definita su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $f(-x) = -f(x)$, quindi si tratta di una funzione dispari.

2. La restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty[$ è una funzione strettamente crescente, in quanto prodotto di due funzioni strettamente crescenti e non negative (x^3 e $\log(1+x^2)$). Poiché f è dispari allora essa risulta strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

3. Con l'introduzione della funzione $g(x) = x^3 \log(1 + x^2) - 1$ il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un solo zero di g su $\mathbb{R}$ e determinarne un'opportuna appossimazione. La funzione g è continua, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, quindi per il teorema degli zeri esiste almeno un numero reale x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Poichè g è strettamente monotona, al pari di f, allora x_0 è anche l'unico zero di g.

Poiché $g(1) = \log 2 - 1 < 0$ e $g(2) = 8\log 5 - 1 > 0$ allora $x_0 \in]1, 2[$.

Applicando il metodo di bisezione determiniamo dunque il segno di

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8}\log\big(1+\frac{9}{4}\big) - 1.$$

Avendosi

$$\frac{27}{8}\log\big(1+\frac{9}{4}\big) - 1 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \log\big(\frac{13}{4}\big) > \frac{8}{27} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{13}{4} > \mathrm{e}^{8/27}$$

e poiché quest'ultima disuguaglianza è vera in quanto

$$\frac{13}{4} > \frac{12}{4} = 3 > \mathrm{e} > \mathrm{e}^{8/27}$$

allora $f(3/2) > 0$ e pertanto $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$ è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

Esercizio 17.9. *Data la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-\mathrm{e}^x}}$,

1. *determinare il dominio e stabilire l'andamento di monotonia;*
2. *stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione* $f(x) = 1 - x$ *e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/8$*, senza fare uso del calcolatore.*

$\boxed{R}$ *1.* Il dominio di f è l'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 - \mathrm{e}^x \geq 0 \text{ e } \sqrt{5-\mathrm{e}^x} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 - \mathrm{e}^x > 0\} =]-\infty, \log 5[.$$

Poiché e^x è strettamente crescente, allora $5 - \mathrm{e}^x$ è strettamente decrescente. Poiché la radice quadrata è strettamente crescente allora, per composizione, $\sqrt{5-\mathrm{e}^x}$ è strettamente decrescente. Ne consegue che il reciproco, cioè $f(x)$, è strettamente crescente.

2. Osserviamo che, posto $g(x) = f(x) - 1 + x$ l'equazione $f(x) = 1 - x$ si può riscrivere nella forma $g(x) = 0$. Osserviamo inoltre che g è una funzione strettamente crescente e continua in $]-\infty, \log 5[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x\to\log 5^-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]-\infty, \log 5[$ tale che $g(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di g, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione. Avendosi

$$g(0) = -1/2 < 0 \;\text{ mentre }\; g(1) = \frac{1}{\sqrt{5-\mathrm{e}}} > 0,$$

allora $x_0 \in]0,1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $1/2$ e l'errore che si commetterebbe approssimando x_0 con questo valore sarebbe inferiore a $1/2$, che è maggiore di $1/8$. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione. Si ha

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{\mathrm{e}}}} - \frac{1}{2} > 0.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{\mathrm{e}}}} > \frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{5-\sqrt{\mathrm{e}}} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 5-\sqrt{\mathrm{e}} < 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 < \sqrt{\mathrm{e}} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \mathrm{e} \end{aligned}$$

che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]0,1/2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $1/4$ e l'errore che si commetterebbe approssimando x_0 con questo valore sarebbe inferiore a $1/4$ che è maggiore di $1/8$. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione. Si ha

$$g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt[4]{\mathrm{e}}}} - \frac{3}{4} < 0.$$

Infatti,

$$\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt[4]{\mathrm{e}}}} < \frac{3}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{5-\sqrt[4]{\mathrm{e}}} > \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 5-\sqrt[4]{\mathrm{e}} > \frac{16}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{39}{9} > \sqrt[4]{\mathrm{e}}$$

che è vero, perch'e $\sqrt[4]{\mathrm{e}} < \sqrt[4]{\mathrm{e}^4} = \mathrm{e} < 3 = \frac{27}{9} < \frac{39}{9}$. Ne consegue che $x_0 \in]1/4, 1/2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/8$ e l'errore che si commette approssimando x_0 con questo valore è inferiore a $1/8$. Pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 3/8$.