16. Limiti in forma indeterminata: esercizi

Esercizio 16.27. *Calcolare, se esistono, i limiti*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}$; *2.* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen}x}$;

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{3}}$; *4.* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$;

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{8(\mathrm{e}^{x}-1)}-1}{\operatorname{sen}(2x)}$.

$\boxed{R}$ *1.* Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Osservato che

$$\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=\frac{\log(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}$$

e che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{sen}x}=2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=1$$

allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=2.$$

2. Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0. Osservato che

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen}x}=\mathrm{e}^{\operatorname{sen}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

e che

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\big(1+\frac{1}{x}\big) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1+y)}{y} = 0,$$

allora, per la continuità della funzione esponenziale, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1+\frac{1}{x}\big)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

3. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eseguiamo, per comodità, il cambiamento di variabile $x = 1 + y$ ottenendo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{\mathrm{e}^{3(1+y)}-\mathrm{e}^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{\mathrm{e}^3(\mathrm{e}^{3y}-1)}.$$

Osservato che

$$\frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{\mathrm{e}^3(\mathrm{e}^{y}-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^3}\frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{2\log(1+y)}\frac{2\log(1+y)}{y}\frac{y}{\mathrm{e}^{3y}-1}$$

e che

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\log(1+y))}{2\log(1+y)} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{2\log(1+y)}{y} = 2,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{e}^{3y}-1} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{3}\frac{3y}{\mathrm{e}^{3y}-1} = \frac{1}{3},$$

allora si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\log x)}{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^3} = \frac{2}{3\,\mathrm{e}^3}\,.$$

4. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osservato che

$$\frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{2^2\log^2(1+x)}2^2\frac{\log^2(1+x)}{x^2}\frac{x^2}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{[2\log(1+x)]^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\log(1+x)}{x}\Big)^2 = 1^2 = 1, \quad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\Big) = 1^2 = 1,$$

allora si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = -\frac{1}{2}2^2 = -2\,.$$

5. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osservato che
$$\frac{\mathrm{e}^{8(\mathrm{e}^x - 1)} - 1}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\mathrm{e}^{8(\mathrm{e}^x - 1)} - 1}{8(\mathrm{e}^x - 1)} \frac{8(\mathrm{e}^x - 1)}{2x} \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}$$

e che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{8(\mathrm{e}^x - 1)} - 1}{8(\mathrm{e}^x - 1)} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{8(\mathrm{e}^x - 1)}{2x} = \lim_{x\to 0} 4\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 4,$$

allora si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{8(\mathrm{e}^x - 1)} - 1}{\operatorname{sen}(2x)} = 4\,.$$