15. Funzioni continue: esercizi

Esercizio 15.7. *Data la funzione* $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ *con legge*

$$f(x) = \begin{cases} x - \alpha & \textit{se } x \le 0 \\ |\beta - x^2| & \textit{se } x > 0, \end{cases}$$

1. dire se per $\alpha = \beta = -1$ *la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; 2. determinare per quali valori di* α *e* β *la funzione* f *è continua; 3. tra i valori di* α *e* β *trovati al punto precedente determinare quelli per cui* f *risulta invertibile.*

$\boxed{R}$ *1.* f è invertibile ed $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f^{-1}(y) = y - 1$ se $y \le 1$ e $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ se $y > 1$.
2. f è continua per tutti gli α e β che soddisfano l'equazione $\alpha + |\beta| = 0$.
3. f è invertibile per tutti gli α e β che soddisfano le condizioni $\alpha = \beta$ e $\beta < 0$.

Esercizio 15.8. *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ *con legge*

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x & \textit{se } x < 0 \\ 2 + ax & \textit{se } 0 \le x < 2 \\ x^2 & \textit{se } x \ge 2 \end{cases}$$

dove a *è un parametro reale. 1. Dire per quali* a *la funzione è invertibile e per quali di essi* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*; 2. dire se per* $a = 1$ *la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; 3. determinare per quali valori di* a*, se esistono, la funzione è continua.*

$\boxed{R}$ *1.* È invertibile per ogni $0 < a \le 1$ e non esistono valori di a tali che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
2. Per $a = 1$ la funzione è invertibile con $f^{-1} :]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} (y-1)/2 & \text{se } y < 1 \\ y - 2 & \text{se } 2 \le y < 4 \\ \sqrt{y} & \text{se } y \ge 4 \end{cases}$$

3. Non esistono.

Esercizio 15.9. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ \log_a x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

1. Dire per quali valori di a la funzione è invertibile; 2. dire se per $a = 3$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa; 3. determinare per quali valori di a la funzione f è continua.

$\boxed{R}$ *1.* È invertibile per ogni $a > 1$.

2. È invertibile e si ha $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 3^y & \text{se } y > 0 \\ y+1 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

3. Per tutti gli $a > 0$, $a \neq 1$.

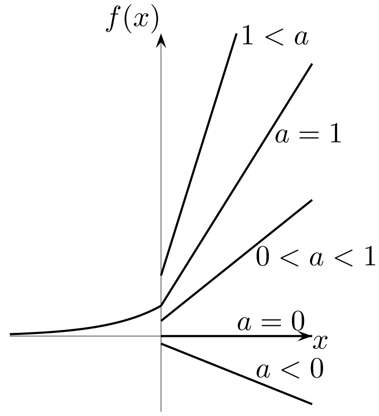
Esercizio 15.10. *Date le funzioni $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$*

1. $f(x) = \begin{cases} 2ax + a, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0, \end{cases}$ *2.* $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3a + 2, & x > 0 \\ 1 - 3x, & x \leq 0, \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ 2ax^2 + 3a + 1, & x < 0, \end{cases}$ *4.* $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0 \\ ax - 2a + 3, & x < 0, \end{cases}$

a. determinare, se esistono, i valori di a tali che f sia invertibile; b. dire se per $a = -1$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare il dominio, l'immagine e la legge della funzione inversa; c. dire per quali valori di a, se ne esistono, la funzione f è continua.

1.a. Rappresentiamo il grafico di f per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a < 0$ oppure $1 \leq a$.

1.b. La funzione è invertibile. In questo caso l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]-\infty, -1[\cup]0, 1]$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in]0, 1]$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 2^x$ ottenendo quindi $x = \log_2 y$.

Se, invece, $y \in]-\infty, -1[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = -2x - 1$, ottenendo $x = -\frac{y+1}{2}$. Ricapitolando

$$f^{-1} :]-\infty, -1[\cup]0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\frac{y+1}{2} & \text{se } y < -1 \\ \log_2 y & \text{se } 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

1.c. Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = 1$. In effetti per definizione vale

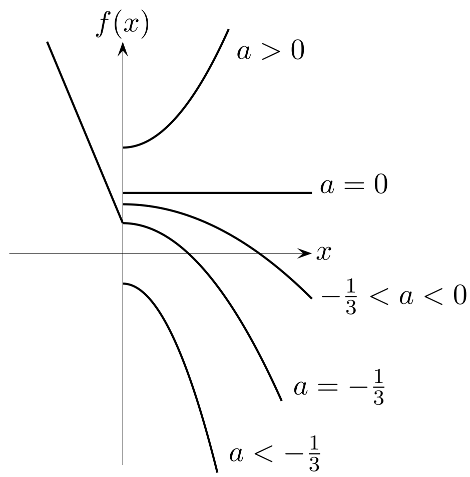
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2^0 = 1$$

Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2ax + a) = a$$

ed effettivamente ciò implica $a = 1$.

2.a. Rappresentiamo il grafico di f per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a \leq -1/3$.

2.b. La funzione è invertibile. In questo caso l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in [1,+\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 1-3x$ ottenendo quindi $x = \frac{1-y}{3}$.

Se, invece, $y \in]-\infty,-1[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = -x^2-1$, ovvero $x^2 = -y-1$. Ricordando che in questo caso $y < -1$ e che i corrispondenti x sono positivi, si ottiene infine $x = \sqrt{-y-1}$. Ricapitolando

$$f^{-1} :]-\infty,-1[\,\cup\,[1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-y}{3} & \text{se } y > 1 \\ \sqrt{-y-1} & \text{se } y < -1 \end{cases}$$

2.c. Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = -1/3$. In effetti per definizione vale

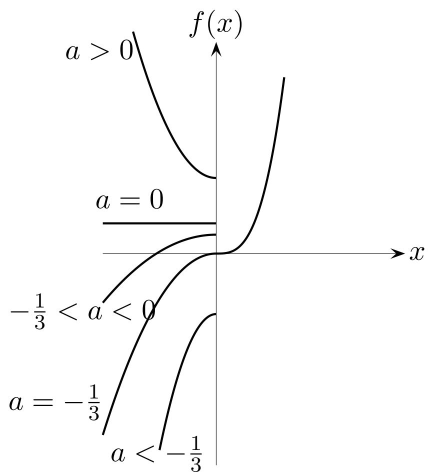
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax^2 + 3a + 2) = 3a + 2$$

ed effettivamente ciò implica $a = -1/3$.

3.a. Rappresentiamo il grafico di f per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a \leq -1/3$.

3.b. Sostituendo si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x^2 - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e la funzione è invertibile. L'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

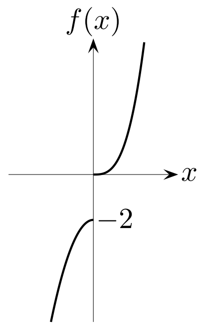
Se $y \in [0, +\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = x^3$ ottenendo quindi $x = \sqrt[3]{y}$.

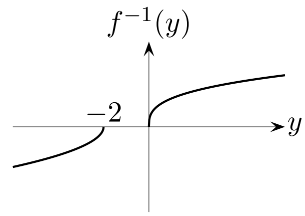
Se, invece, $y \in]-\infty, -2[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = -2x^2 - 2$, ovvero $x^2 = \frac{-y-2}{2}$. Ricordando che in questo caso $y < -2$ e che i corrispondenti x sono negativi, si ottiene infine $x = -\sqrt{\frac{-y-2}{2}}$.

Ricapitolando

$$f^{-1} :]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{-y-2}{2}} & \text{se } y < -2 \end{cases}$$





3.c. Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = -1/3$. In effetti per definizione vale

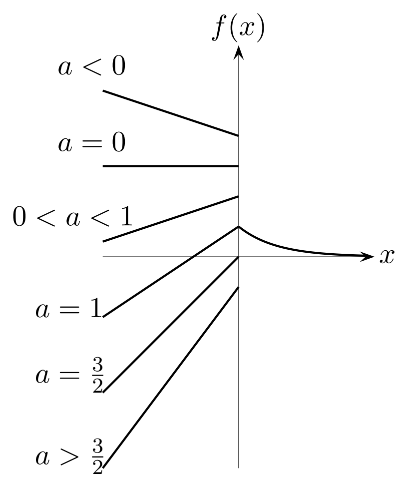
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0.$$

Dovrà dunque essere

$$0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2ax^2 + 3a + 1) = 3a + 1$$

ed effettivamente ciò implica $a = -1/3$.

4.a. Rappresentiamo il grafico di f per vari intervalli del parametro reale a



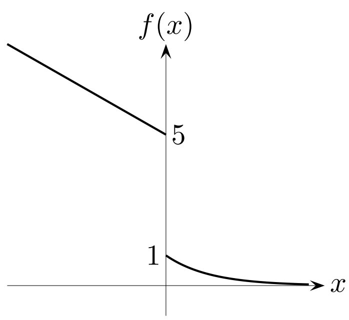
La funzione è invertibile se $a < 0$ oppure $a \geq 3/2$.
4.b. Sostituendo si ottiene

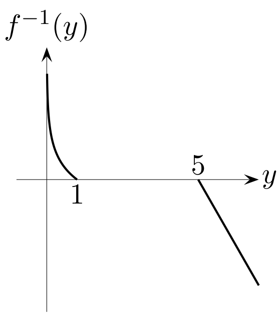
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 5 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e la funzione è invertibile. L'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]0,1] \cup]5,+\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in]0,1]$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = (1/3)^x$ ottenendo quindi $x = \log_{1/3} y$.

Se, invece, $y \in]5,+\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = -x + 5$, ovvero $x = 5 - y$.





Ricapitolando

$$f^{-1} :]0,1] \cup [5,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \log_{1/3} y & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 5 - y & \text{se } y > 5 \end{cases}$$

4.c. Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = 1$. In effetti per definizione vale

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax - 2a + 3) = -2a + 3$$

ed effettivamente ciò implica $a = 1$.

Esercizio 15.13. *Calcolare i limiti seguenti, qualora esistano.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2^x - 8}{x^2 - 3x + 2}$;
2. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^2 + 3t + 1}{(1-t)\ln t}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 12}{\log(3-x)}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\cos(\frac{\pi x}{4})}{(3-x)^2}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{x^2 - 9}{\sin x}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 2\,e^{5x}}{2x - \sin(x^2)}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{3^x - 9}$.

$\boxed{R}$ *1.*

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x - 8}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-4}{0}\right],$$

quindi andiamo a studiare il segno della funzione. Il numeratore è positivo per $2^x > 8 = 2^3$ quindi per $x > 3$, il denominatore è positivo per $x^2 - 3x + 2 > 0$ quindi per $x < 1$ oppure $x > 2$. Si ha quindi che la funzione è positiva per $x > 3$ e per $1 < x < 2$, negativa per $x < 1$ e $2 < x < 3$. Si ha dunque

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2^x - 8}{x^2 - 3x + 2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{2^x - 8}{x^2 - 3x + 2} = +\infty,$$

e quindi il limite non esiste.

2. Il limite si presenta nella forma d'indecisione $[\frac{5}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $t_0 = 1$. Il numeratore tende a 5 e quindi è positivo per i valori di t vicini a 1. Poiché $\ln t$ è positivo per $t > 1$ si ottiene che il denominatore è sempre negativo per $t \neq 1$. Quindi

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^2 + 3t + 1}{(1-t)\ln t} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 12}{\log(3-x)} = \left[\frac{2}{0}\right],$$

quindi andiamo a studiare il segno della funzione. Il numeratore tende a 2 e quindi vicino a 2 è positivo, il denominatore è positivo per $\log(3-x) > 0$

ovvero $3 - x > 1$, cioé $x < 2$. In conclusione

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 7x + 12}{\log(3-x)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{\log(3-x)} = +\infty,$$

e quindi il limite non esiste.

4. Il limite vale $-\infty$.

5.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 - 9}{\sin x} = \left[\frac{\pi^2 - 9}{0}\right],$$

quindi andiamo a studiare il segno della funzione. Il numeratore tende a $\pi^2 - 9 > 0$ e quindi per x vicino a π è positivo, il denominatore è positivo per $\sin x > 0$, quindi è positivo per x vicino a π a destra, negativo per x vicino a π a sinistra. In conclusione

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{x^2 - 9}{\sin x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi^+} \frac{x^2 - 9}{\sin x} = +\infty,$$

e quindi il limite non esiste.

6. Il limite è della forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 2e^{5x}}{2x - \sin(x^2)} = \left[\frac{-2}{0}\right],$$

quindi siamo ricondotti a studiare il segno della funzione vicino al punto $x = 0$. Il numeratore tende a -2 quindi è negativo per gli x vicini a 0. Per quanto riguarda il denominatore, bisogna ricordare la disuguaglianza fondamentale

$$0 < \sin x < x, \qquad \forall x > 0,$$

e quindi

$$0 < \sin(x^2) < x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Perciò, se $x < 0$ si ha facilmente

$$2x - \sin(x^2) < 0,$$

mentre se $2 > x > 0$ si ha

$$2x - \sin(x^2) > 2x - x^2 > 0.$$

Si conclude che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3\tan x - 2e^{5x}}{2x - \sin(x^2)} = \left[\frac{-2}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

ed il limite non esiste.

7.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+3}{3^x-9}=\left[\frac{-1}{0}\right],$$

quindi andiamo a studiare il segno della funzione. Il numeratore è positivo per $x^2-4x+3>0$ quindi per $x>3$ oppure $x<1$, il denominatore è positivo per $3^x>9=3^2$ quindi per $x>2$. Si ha quindi che la funzione è positiva per $x>3$ e per $1<x<2$, negativa per $x<1$ e $2<x<3$. Si ha dunque

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4x+3}{3^x-9}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x+3}{3^x-9}=+\infty,$$

e quindi il limite non esiste.