7. Le funzioni elementari: esercizi

Esercizio 7.17. *Risolvere le disequazioni*

1. $\dfrac{8}{\log_2(3x+1)} \geq \log_4(3x+1)$;

2. $\log_2 \dfrac{1}{|x|} + \log_{1/2}|x| > 4$;

3. $\log|x+1| - \log|x-1| \leq \log(3x)$;

4. $\log_{27} \sqrt[3]{x} - \log_9 x^3 > \dfrac{5}{9}$;

5. $\log_3|2x+1| + \log_{1/3}|x-1| < 0$;

6. $\log|x-1| < \log x + \log 2$;

7. $\log|x| - \log|x-2| \geq \log(x-1)$;

8. $\log_2(-2t) \leq 2\log_4|t^3+4t|$;

9. $\log_3|1-7x| < 2$;

10. $\log_{1/2}|3x| \leq \log_2(1-6x)$;

11. $\log_5|x-2| \geq \log_{1/5} x$;

12. $\log_2 \sqrt[3]{x} + \log_{1/4} x^2 \leq 1$;

13. $\log_3|3-2x| \geq -\log_{1/3}(1+x^2)$;

14. $2|\log x| + \log|x| \leq 1$;

15. $\log_2|x-3| + \log_4 \dfrac{1}{|x-2|} \geq 1$;

16. $\log|2x-9| < 0$;

17. $\log_{1/3}(4-9x^2) \geq -1$;

18. $\log_2(x+5) - \log_4(x^2-9) \geq 0$;

19. $\log_{1/3}(x+2) < \log_{1/9}(4x+5)$;

20. $\log_{1/2}(x-1) < \log_{1/4}(3x-5)$;

21. $\log_2|1-2x| \leq 2\log_4(3x+1)$;

22. $\log_2 x + \log_8 x < 1$.

$\boxed{R}$ *1.* Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che

$$3x+1>0, \quad \log(3x+1) \neq 0$$

cioè $x \in]-1/3, +\infty[\setminus \{0\}$. Con la formula del cambiamento di base si ha

$$\frac{8}{\log_2(3x+1)} \geq \frac{\log_2(3x+1)}{2}$$

che, portando tutto a primo membro e riducendo allo stesso denominatore, diventa

$$\frac{16 - \log_2^2(3x+1)}{2\log_2(3x+1)} \geq 0$$

equivalente ai sistemi

$$\begin{cases} 16 - \log_2^2(3x+1) \geq 0 \\ \log_2(3x+1) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 16 - \log_2^2(3x+1) \leq 0 \\ \log_2(3x+1) < 0 \end{cases}$$

che equivalgono a

$$0 < \log_2(3x+1) \leq 4 \quad \bigcup \quad \log_2(3x+1) < -4$$

che hanno come soluzioni, rispettivamente, $]0, 5[$ e $]-1/3, -5/16[$, quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]-1/3, -5/16[\cup]0, 5[$.

2. $S =]-1/4, 1/4[\setminus \{0\}$.

3. $S = [(2+\sqrt{7})/3, +\infty[$.

4. $S =]0, 1/\sqrt[5]{9}[$.

5. Affinché le funzioni che compaiono nella disuguaglianza siano definite occorre che $2x+1 \neq 0$ e $x-1 \neq 0$, cioè $x \neq -1/2$ e $x \neq 1$. Per la formula del cambiamento di base la disequazione equivale a

$$\log_3|2x+1| + \frac{\log_3|x-1|}{\log_3(1/3)} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_3|2x+1| < \log_3|x-1|$$

che, siccome il logaritmo in base 3 è strettamente crescente, equivale a

$$|2x+1| < |x-1| \quad \text{(ricordando però che } x \neq -1/2 \text{ e } x \neq 1)$$

che, con facili conti, ha come insieme delle soluzioni $S =]-2, 0[\setminus \{-1/2\}$.

6. $S =]1/3, 1[\cup]1, +\infty[$.

7. $]1, 2[\cup]2, 2+\sqrt{2}]$.

8. $]-\infty, 0[$.

9. $]-8/7, 10/7[\setminus \{1/7\}$.

10. Osserviamo anzitutto che, affinchè le funzioni che compaiono nella disequazione abbiano senso occorre che

$$|3x| > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 0$$

e

$$1 - 6x > 0 \iff x < 1/6.$$

Con la formula del cambiamento di base si ha

$$\log_{1/2}|3x| = \frac{\log_2|3x|}{\log_2(1/2)} = -\log_2|3x| = \log_2|3x|^{-1} \quad \forall x \neq 0$$

e la disequazione è equivalente a

$$\log_2 \frac{1}{|3x|} \leq \log_2 1 - 6x.$$

Poiché il logaritmo in base 2 è una funzione crescente quest'ultima equivale a

$$\frac{1}{|3x|} \leq 1 - 6x.$$

Nel caso in cui $0 < x < 1/6$ la disequazione diventa

$$\frac{1}{3x} \leq 1 - 6x \iff 3x(1-6x) \geq 1 \iff 18x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

che è falsa per ogni x. Ne consegue che non vi sono soluzioni della disequazione tra 0 e 1/6.

Nel caso in cui $x < 0$ la disequazione diventa

$$-\frac{1}{3x} \leq 1 - 6x \iff -3x(1-6x) \geq 1 \iff 18x^2 - 3x - 1 \geq 0;$$

il discriminante è $\Delta = 9+72 = 81$, quindi le soluzioni della disequazione sono tutti gli x esterni all'intervallo che ha come estremi le soluzioni dell'equazione $18x^2 - 3x - 1 = 0$, cioè $x_1 = \frac{3-9}{36} = -1/6$ e $x_2 = \frac{3+9}{36} = 1/3$, e, ricordando che stiamo ora considerando solo gli $x < 0$ si ha che sono soluzioni tutti gli $x \in S =]-\infty, -1/6]$.

11. $\{1\} \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty[$.

12. $[2^{-3/2}, +\infty[$.

13. $[-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}]$.

14. $[1/e, \sqrt[3]{e}]$.

15. $]-\infty, 2[\cup]2, 5 - 2\sqrt{2}] \cup [5 + 2\sqrt{2}, +\infty[$.

16. Osserviamo anzitutto che, affinchè la funzione a primo membro abbia senso occorre che

$$|2x - 9| \neq 0 \iff x \neq \frac{9}{2}.$$

La disequazione è equivalente a

$$|2x-9|<1 \iff -1<2x-9<1 \iff 8<2x<10 \iff 4<x<5$$

quindi l'insieme delle soluzioni è $S =]4,5[\setminus \{9/2\}$.

17. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $4-9x^2>0$ ovvero $x^2<4/9$ cioè $|x|<2/3$. Per le proprietà di monotonia del logaritmo con base minore di 1 si ha che la disequazione equivale a

$$4-9x^2 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \iff 9x^2 \ge 1 \iff |x| \ge 1/3.$$

La soluzione è dunque data dagli x che verificano $1/3 \le |x| < 2/3$ o, equivalentemente, dagli x tali che $-2/3 < x \le -1/3$ oppure $1/3 \le x < 2/3$.

18. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $x+5>0$ e $x^2-9>0$ ovvero, in definitiva, che $-5<x<-3$ oppure $x>3$. Utilizzando la formula di cambiamento della base e le proprietà di monotonia dei logaritmi, si ottiene:

$$\log_2(x+5) - \frac{\log_w(x^2-9)}{\log_2 4} \ge 0 \iff 2\log_2(x+5) \ge \log_2(x^2-9)$$

$$\iff \log_2(x+5)^2 \ge \log_2(x^2-9) \iff (x+5)^2 \ge x^2-9$$

che equivale a $10x+25 \ge -9$ cioè $x \ge -17/5$. Ricordando le condizioni d'esistenza si ottiene allora che le soluzioni sono date da $-17/5 \le x < -3$ oppure $x>3$.

19. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $x+2>0$ e $4x+5>0$ ovvero in definitiva $x>-5/4$. Mediante un cambiamento di base dei logaritmi si ha

$$\log_{1/9}(4x+5) = \frac{\log_{1/3}(4x+5)}{\log_{1/3}(1/9)} = \frac{\log_{1/3}(4x+5)}{2}.$$

La disequazione equivale dunque a

$$2\log_{1/3}(x+2) < \log_{1/3}(4x+5) \iff \log_{1/3}(x+2)^2 < \log_{1/3}(4x+5).$$

Dalle proprietà di monotonia della funzione esponenziale (di base $1/3<1$) si ha che quest'ultima equivale a

$$(x+2)^2 > 4x+5 \iff x^2-1>0 \iff x>1 \text{ oppure } x<-1.$$

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che la disequazione è verificata per $x \in]-5/4, -1[\cup]1, +\infty[$.

20. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $x - 1 > 0$ e $3x - 5 > 0$ ovvero in definitiva $x > 5/3$. Mediante un cambiamento di base dei logaritmi si ha

$$\log_{1/4}(3x-5) = \frac{\log_{1/2}(3x-5)}{\log_{1/2}(1/4)} = \frac{\log_{1/2}(3x-5)}{2}.$$

La disequazione equivale dunque a

$$2\log_{1/2}(x-1) < \log_{1/2}(3x-5) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_{1/2}(x-1)^2 < \log_{1/2}(3x-5)$$

Dalle proprietà di monotonia della funzione esponenziale (di base $1/2 < 1$) si ha che quest'ultima equivale a

$$(x-1)^2 > 3x - 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 3 \;\text{ oppure }\; x < 2.$$

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che la disequazione è verificata per $x \in [5/3, 2[\cup]3, +\infty[$.

21. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che

$$\begin{cases} |1-2x| > 0 \\ (3x+1) > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x > -1/3 \end{cases}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi si ottiene

$$\log_4(3x+1) = \frac{\log_2(3x+1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(3x+1)}{2}$$

perciò la disequazione equivale a

$$\log_2|1-2x| \leq \log_2(3x+1)$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, quest'ultima equivale a

$$|1-2x| \leq (3x+1)$$

Distinguiamo due casi: se $1 - 2x > 0$ ovvero se $x < 1/2$, la disequazione equivale a $1 - 2x \leq 3x + 1$ che ha come soluzioni gli $x \geq 0$, e in definitiva, gli $0 \leq x < 1/2$.

Nel secondo caso, se $1 - 2x < 0$ ovvero se $x > 1/2$, la disequazione equivale a $-(1 - 2x) \leq 3x + 1$ che ha come soluzioni gli $x \geq -2$, e in definitiva, gli $x > 1/2$.

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S = [0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$$

22. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $x > 0$. Utilizzando il cambiamento di base dei logaritmi e le proprietà dei logaritmi, si ottiene:

$$\log_2 x = \frac{\log_8 x}{\log_8 2} = 3 \log_8 x$$

e quindi

$$\log_2 x + \log_8 x < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\log_8 x + \log_8 x < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\log_8 x < 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_8 x < \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x < 8^{1/4} \quad \Longleftrightarrow \quad x < \sqrt[4]{8}$$

Ricordando le condizioni d'esistenza, l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S =]0, \sqrt[4]{8}[$.

Esercizio 7.18. *Risolvere le disequazioni*

1. $2^{(x^2-1)/|x+2|} < 4$; *2.* $3^{|x|} + \dfrac{1}{3^x} \leq 2$; *3.* $3^{|2-5x|} < 2$;

4. $\mathrm{e}^{|x|} + 3\,\mathrm{e}^x > 4$; *5.* $\mathrm{e}^{|2x-7|-|x+3|} \geq 1$; *6.* $\dfrac{2^{3x}}{64} \geq 2^{|2x-15|}$;

7. $2^{|x+2|} \leq 32 \cdot 2^{2x}$.

$\boxed{R}$ *1.* Poiché $4 = 2^2$ e l'esponenziale è strettamente crescente allora la disequazione equivale a

$$\frac{x^2-1}{|x+2|} < 2,$$

che, con semplici conti, ha come insieme delle soluzioni $S =]1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}[$.

2. Distinguiamo i casi $x < 0$ e $x \geq 0$. Se $x < 0$ la disequazione equivale a

$$\frac{2}{3^x} \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^x \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0$$

e non vi sono pertanto soluzioni negative. Se invece $x \geq 0$, la disequazione equivale a

$$3^x + \frac{1}{3^x} \leq 2$$

che, moltiplicando per il numero positivo 3^x e portando tutto a primo membro, diviene

$$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3^x - 1)^2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

che è, pertanto, l'unica soluzione della disequazione.

3. $\left]\dfrac{2 - \log_3 2}{5}, \dfrac{2 + \log_3 2}{5}\right[$.

4. $]-\infty, -\log 3[\cup]0, +\infty[$.

5. $]-\infty, 4/3] \cup [10, +\infty[$.

6. $[21/5, +\infty[$.

7. Utilizzando le proprietà della funzione esponenziale, si ottiene che la disuguaglianza data equivale a

$$2^{|x+2|} \leq 2^5 \cdot 2^{2x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{|x+2|} \leq 2^{5+2x} \quad \Longleftrightarrow \quad |x + 2| \leq 5 + 2x$$

Distinguiamo due casi, a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto: la disequazione equivale quindi all'unione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 5 + 2x \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x + 2 < 0 \\ -(x + 2) \leq 5 + 2x \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -\frac{7}{3} \end{cases}$$

quindi

$$x \geq -2 \quad \cup \quad -7/3 \leq x < -2$$

che equivale a $x \geq -7/3$. Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione è

$$S = [-7/3, +\infty[$$

Esercizio 7.19. *Risolvere le disequazioni*

1. $2^{\sqrt{4x^2-1}} \leq \dfrac{1}{4^{x-1}}$;

2. $3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 9 \cdot 3^x$;

3. $1 + \log_2(x + 2) \leq \log_2(1 + \sqrt{9 - x^2})$;

4. $\log_2(5\,\mathrm{e}^x - 1) \leq 2\log_2(\mathrm{e}^x + 1)$.

$\boxed{R}$ *1.* Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che $4x^2 - 1 \geq 0$ che è equivalente a

$$2^{\sqrt{4x^2-1}} \leq 2^{2(1-x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{4x^2-1} \leq 2(1-x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (\sqrt{4x^2-1})^2 \leq 4(1-x)^2 \\ 1 - x \geq 0 \\ 4x^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} -1 \leq 4 - 8x \\ 1 \geq x \\ x \geq 1/2 \text{ oppure } x \leq -1/2 \end{cases}$$

che ha come insieme delle soluzioni $S =]-\infty, -1/2] \cup [1/2, 5/8]$.

2. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre che l'argomento della radice quadrata sia non negativo, cioè $x^2 - 1 \geq 0$ ovvero $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Poiché inoltre $9 = 3^2$ la disequazione può essere scritta nella forma

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 3^{2+x}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 3 si ottiene equivalentemente

$$\sqrt{x^2-1} \geq 2 + x$$

Si distinguono 2 casi: se $2 + x < 0$ ovvero $x < -2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è positivo, quello destro negativo.

Nel secondo caso, se $2 + x \geq 0$ ovvero $x \geq -2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

$$x^2 - 1 \geq 4 + 4x + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -5 \geq 4x \quad \Longleftrightarrow \quad -5/4 \geq x$$

ottenendo quindi le soluzioni $-2 \leq x \leq -5/4$.

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzione è dato da

$$S =]-\infty, -5/4]$$

3. L'argomento del secondo logaritmo è sempre positivo. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre quindi che

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2 < x \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Longleftrightarrow -2 < x \leq 3$$

Osservando che $1 = \log_2 2$ e utilizzando le formule dei logaritmi, si ottiene la disequazione equivalente

$$\log_2 \left[2(x+2)\right] \le \log_2(1 + \sqrt{9-x^2})$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, la disequazione equivale a

$$2x + 4 \le 1 + \sqrt{9-x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x + 3 \le \sqrt{9-x^2}$$

Distinguiamo due casi: se $2x + 3 < 0$ ovvero se $x < -3/2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è negativo, quello destro positivo.

Nel secondo caso, se $2x + 3 \ge 0$ ovvero se $x \ge -3/2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

$$(2x+3)^2 \le 9 - x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x^2 + 12x \le 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -12/5 \le x \le 0.$$

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S =]-2, 0]$$

4. Per facilità si può sostituire $z = e^x > 0$. Affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite occorre quindi che $5z - 1 > 0$. Per le proprietà del logaritmo, la disequazione è equivalente a

$$\log_2(5z-1) \le \log_2((z+1)^2) \iff 5z-1 \le (z+1)^2 \iff z^2 - 3z + 2 \ge 0.$$

Ricordandoci la condizione d'esistenza $z > 1/5$, si ottiene che la soluzione è data dagli z per cui $1/5 < z \le 1$ oppure $z \ge 2$, che in termini di x diventa $-\log 5 < x \le 0$ oppure $x > \log 2$.

Esercizio 7.20. *Trovare il dominio delle seguenti funzioni*

1. $h(x) = \sqrt{9 - 3^{1-5x}} + \ln(x^2 - 9x + 8)$; *2.* $h(x) = \log_3\left(1 - e^{(2x^2-3)}\right)$;

3. $h(x) = \sqrt{1 - \log_4(x^2 - x - 2)}$.

$\boxed{R}$ *1.* Il dominio di h è rappresentato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 9 - 3^{1-5x} \ge 0, \\ x^2 - 9x + 8 > 0. \end{cases}$$

La seconda disequazione è verificata per $x < 1$ oppure $x > 8$. La prima è equivalente a:

$$3^2 \geq 3^{1-5x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \geq 1 - 5x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq -\frac{1}{5}.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema, e quindi il dominio di h, è dato da $[-1/5, 1[\cup]8, +\infty[$.

2. Il dominio di h è dato dalle soluzioni di $1 - \mathrm{e}^{(2x^2-3)} > 0$ cioè $1 > \mathrm{e}^{(2x^2-3)}$ che equivale a $0 > 2x^2 - 3$. Il dominio è dunque $\mathcal{D} =]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

3. Il dominio di h è rappresentato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 1 - \log_4(x^2 - x - 2) \geq 0. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $x > 2$ oppure $x < -1$. La seconda disequazione è equivalente a:

$$1 \geq \log_4(x^2 - x - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4^1 \geq 4^{\log_4(x^2-x-2)} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 4 \geq x^2 - x - 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - x - 6 \leq 0,$$

per cui le soluzioni sono date dagli $x \in [-2, 3]$.

L'insieme delle soluzioni del sistema, e quindi il dominio di h, è dato da $[-2, -1[\cup]2, 3]$.