3. I numeri reali: esercizi

Esercizio 3.8. *Dimostrare che* $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{R}$ Se fosse $\sqrt{2}+\sqrt{3} = q \in \mathbb{Q}$ si avrebbe $2+3+2\sqrt{6} = q^2$ cioè $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ il che è falso: si prova come nel teorema 3.1 (si osservi che questo non segue però dal fatto che $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ con $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; poiché il prodotto di due numeri irrazionali può essere razionale).

Esercizio 3.10. *Dimostrare con esempi che la somma ed il prodotto di due numeri irrazionali può avere come risultato un numero razionale. Dimostrare, poi, che* $(\sqrt[3]{2})^2 \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{R}$ Esempio: $\sqrt{2} \notin Q$ ma $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Supponiamo per assurdo che $(\sqrt[3]{2})^2 \in \mathbb{Q}$. Allora esistono due numeri interi non nulli e primi tra loro p e q tali che $(\sqrt[3]{2})^2 = p/q$. Elevando ambo i membri al cubo si ha che $2^2 = p^3/q^3$ e quindi $q^3 2^2 = p^3$ quindi p^3 è pari. Ne consegue che anche p è pari, perché se fosse dispari anche p^3 (con un semplice calcolo) risulterebbe dispari. Allora esiste un numero intero m tale che $p = 2m$ e vale l'uguaglianza $q^3 2^2 = 2^3 m^3$, cioè $q^3 = 2m^3$ pertanto anche q^3, e quindi q, risulterebbero pari, contro il fatto che p e q sono non nulli e primi tra loro.

Esercizio 3.11. *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$. *Dimostrare che si ha*

$$\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

e che la prima disuguaglianza si riduce ad un'uguaglianza se e solo se $a = b$, *mentre la seconda si riduce ad un'uguaglianza se e solo se* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

$\boxed{R}$ Poiché $a, b \geq 0$, le disuguaglianze sono equivalenti a

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \leq a+b \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

cioè a

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \sqrt{ab} \leq a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab}.$$

La prima disuguaglianza equivale alla nota disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

che è vera per ogni $a, b \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

La seconda disuguaglianza equivale a

$$0 \leq 2\sqrt{ab}$$

che è vera per ogni $a, b \geq 0$ e, per la legge di annullamento del prodotto, vale l'uguaglianza se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$.