1. Il linguaggio della matematica: esercizi

Esercizio 1.5. *Dire se le seguenti coppie di proposizioni sono o meno equivalenti.*

1. $[P\,\mathrm{e}\,(\mathrm{non}\,Q)]\,\mathrm{o}\,[Q\,\mathrm{e}\,(\mathrm{non}\,P)], \qquad (P\,\mathrm{o}\,Q)\,\mathrm{e}\,[\mathrm{non}(P\,\mathrm{e}\,Q)]$;
2. $P \Rightarrow (P\,\mathrm{o}\,Q), \qquad P \Rightarrow (P\,\mathrm{e}\,Q)$;
3. $(P\,\mathrm{o}\,Q) \Rightarrow P, \qquad (P\,\mathrm{e}\,Q) \Rightarrow P$;
4. $(P\,\mathrm{e}\,Q) \Rightarrow R, \qquad (P \Rightarrow R)\,\mathrm{e}\,(Q \Rightarrow R)$;
5. $P \Rightarrow (Q\,\mathrm{o}\,R), \qquad (P \Rightarrow R)\,\mathrm{o}\,(Q \Rightarrow R)$.

$\boxed{R}$ *1.* Le tabelle di verità delle due proposizioni risultano entrambe uguali a

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Avendo la stessa tabella di verità le due proposizioni sono equivalenti.
2. Non sono equivalenti perchè quando P è vera e Q è falsa, la prima proposizione è vera mentre la seconda è falsa.
3. Non sono equivalenti.
4. Risulta

P	Q	R	$(P\,\mathrm{e}\,Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

P	Q	R	$(P \Rightarrow R)\,\mathrm{e}\,(Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Le tabelle di verità sono diverse, quindi le proposizioni non sono equivalenti.
5. Le due proposizioni non sono equivalenti poiché quando P e Q sono vere e R è falsa, la prima proposizione risulta vera mentre la seconda è falsa.

Esercizio 1.7. *Negare le seguenti proposizioni in modo che la negazione compaia il più internamente possibile.*

1. $\exists\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{o}\, Q(x)\big);$	*4.* $\forall\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{o}\, Q(x)\big);$
2. $\exists\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{e}\, Q(x)\big);$	*5.* $\forall\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{e}\, Q(x)\big);$
3. $\exists\, x \;:\; \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big);$	*6.* $\forall\, x \;:\; \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big).$

$\boxed{R}$ *1.* Si ha

$$\mathrm{non}\Big(\exists\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{o}\, Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \;:\; \mathrm{non}\big(P(x) \,\mathrm{o}\, Q(x)\big)$$

e, per la 3 di pagina 6, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \;:\; \mathrm{non}\bigg(\mathrm{non}\Big(\big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{e}\, \big(\mathrm{non}\, Q(x)\big)\Big)\bigg)$$

e quindi a

$$\forall\, x \;:\; \big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{e}\, \big(\mathrm{non}\, Q(x)\big).$$

2. Si ha

$$\mathrm{non}\Big(\exists\, x \;:\; \big(P(x) \,\mathrm{e}\, Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \;:\; \mathrm{non}\big(P(x) \,\mathrm{e}\, Q(x)\big)$$

e, per la 2 di pagina 5, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \;:\; \mathrm{non}\bigg(\mathrm{non}\Big(\big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{o}\, \big(\mathrm{non}\, Q(x)\big)\Big)\bigg)$$

e quindi a

$$\forall\, x \;:\; \big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{o}\, \big(\mathrm{non}\, Q(x)\big).$$

3. Si ha

$$\mathrm{non}\Big(\exists\, x \;:\; \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \;:\; \mathrm{non}\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$$

e, per quanto visto precedentemente, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \;:\; \mathrm{non}\Big(\big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{o}\, Q(x)\Big)$$

e $\big(\mathrm{non}\, P(x)\big) \,\mathrm{o}\, Q(x)$ equivale a $\mathrm{non}\Big(P(x) \,\mathrm{e}\, \big(\mathrm{non}\, Q(x)\big)\Big)$ (cfr. 3 di pagina 6) che, sostituita nella precedente, dà

$$\big(P(x) \text{ e non } Q(x)\big) \quad \forall\, x.$$