Osservazione 16.18 Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Osserviamo che
$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\, n > 1,$$
infatti $n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}} > 1$ in quanto $\frac{\log n}{n} > 0$.

Posto $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ (> 0), si ha
$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n,$$
ed elevando alla n e poi utilizzando la formula del binomio si ha
$$\begin{aligned} n &= (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \text{ termini positivi } \geq \\ &\geq 1 + n a_n + \frac{n!}{(n-2)!2!} a_n^2 = 1 + n a_n + \frac{(n-1)n}{2} a_n^2 \geq \\ &\geq \frac{(n-1)n}{2} a_n^2 \end{aligned}$$
da cui $a_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$. Essendo $a_n > 0$ si ha allora
$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$$
e per il teorema del confronto $a_n \to 0$, quindi $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \to 1$.