Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 7

Serie numeriche

Che senso dare ad una somma di infiniti termini è un tema che ha interessato i maggiori matematici del '700, ma che ha radici nell'antichità. Sono infatti famosi in proposito i paradossi del filosofo greco Zenone di Elea vissuto nel v secolo a.C.. L'assetto moderno della teoria delle serie viene però raggiunto solo nelle opere di Cauchy (Cours d'Analyse, 1821).

Supponiamo di avere una successione (a_n) e di voler sommare i suoi termini uno dopo l'altro. Potendo in pratica sommarne solo un numero finito, che "valore" possiamo dare alla somma degli infiniti termini? In qualche caso particolare la risposta si presenta particolarmente semplice. Ad esempio, se $a_n = 1$ per ogni n allora la somma dei primi n termini (partendo da $n = 1$) sarà n; fissato quindi un qualunque numero reale R, sommando un numero sufficientemente grande di termini, la somma ottenuta supererà R e, in questo senso, diremo che la somma degli infiniti termini diverge a $+\infty$. Viceversa, se $a_n = \frac{1}{2^n}$ allora si vede con un semplice argomento geometrico che la somma di un numero qualunque finito di termini non potrà mai superare 1. Possiamo disporre le varie somme "parziali" in una successione, che risulta crescente e limitata, e pertanto ammette un limite finito $0 < \ell \leq 1$. Potremmo allora in questo caso (come d'altra parte anche in quello precedente) definire la somma degli infiniti termini come il limite ℓ della successione delle somme parziali.

Serie associata ad una successione

Definizione 7.1.

Data una successione (a_n) *di numeri reali, si chiama* serie associata ad (a_n) *la successione* (s_n) *definita da*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

i cui elementi sono detti somme parziali. *Così la serie associata ad* (a_n) *è anche detta successione delle somme parziali di* (a_n)*, mentre* a_n *si chiama* termine generale *della serie.*
Si dice che la serie è convergente *o* divergente (positivamente o negativamente) *secondo che la successione* (s_n) *sia convergente o divergente. Se la successione* (s_n) *non ha limite si dice che la serie è* indeterminata.

Se esiste il limite di (s_n) per $n \to \infty$, allora lo si indica nel modo seguente

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

o, ciò che è lo stesso cambiando semplicemente nome all'indice, con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e tale limite si chiama *somma della serie* (che può pertanto essere finita o infinita).

La serie è quindi la formalizzazione matematica, nell'ambito del calcolo infinitesimale (introdotto solo alla fine del '600 da Newton e Leibniz), dell'idea di "somma di infiniti termini", idea che non è affatto intuitiva, come dimostra l'ampio dibattito che la questione ha suscitato tra i matematici del '700 (tra cui l'italiano Grandi, lo stesso Leibniz, Eulero, Lagrange, D'Alembert, Abel) e le notevoli implicazioni di carattere filosofico che ne sono derivate e che tutt'ora ne derivano; chi fosse interessato alla questione può consultare il divertente libro di Nicholas Falletta "Il Libro dei paradossi" edito da Longanesi (1989), Capitolo 25.

Con abuso di notazione, anche la serie (cioè la successione (s_n)) oltre che il suo limite si indica col simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Naturalmente se anziché da $n = 0$ l'indice di sommatoria partisse da $n = n_0$ questo cambierebbe l'eventuale somma della serie ma non il suo *carattere*, cioè convergenza, divergenza, indeterminazione. Analogamente, il carattere di una serie rimane invariato se se ne cambiano solamente un numero finito di termini della successione a_n.

La serie geometrica

Esempio 7.2. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

è detta *serie geometrica di ragione* x. È possibile dimostrare per induzione che si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} & \text{se } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

La denominazione data a questa serie viene dal fatto che, se $x \geq 0$, ogni termine è la media geometrica tra il precedente e il successivo, cioè, detto $a_n = x^n$ si ha $a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$.

Le serie geometriche trovano molteplici applicazioni in vari campi. Per esempio il numero $0.\overline{1}$ non è altro che la somma di una serie geometrica di ragione $1/10$ se la base scelta per la numerazione è 10, mentre se la base è 2 è la somma di una serie geometrica di ragione $1/2$. Calcolando la somma delle serie (facendo attenzione che n parte da 1 e non da 0 e quindi dall'espressione della somma trovata sopra occorrerà togliere il primo termine della serie) si trova che nel caso della base 10 l'allineamento decimale, cioè la serie, $0.\overline{1}$ rappresenta il numero razionale $1/9$ mentre in base 2 rappesenta il numero 1. Allo stesso modo è possibile *dimostrare* che $0.\overline{9} = 1$ in base 10, cosa della quale avevamo dato solo un argomento di plausibilità quando all'inizio del corso abbiamo parlato delle rappresentazioni decimali dei numeri reali.

La serie di Mengoli

Esempio 7.3. Mostriamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Avendosi

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

elidendo due a due i termini nella espressione di s_n è semplice dedurre che

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

formula che può essere provata per induzione.

Esercizi

Esercizio 7.4. *Calcolare la somma delle seguenti serie:*

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

$\boxed{R}$ *1.* Ricordando che per le serie geometriche di ragione $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

allora si ottiene

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} - (1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}) = \frac{8}{9}.$$

2. Avendosi

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)$$

elidendo a tre a tre i termini nella espressione della ridotta n-esima S_n della serie si ottiene

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big),$$

formula che deve essere provata per induzione, si ha $S_n \to 1/4$ e questo limite è per definizione la somma della serie.

3. Conviene scrivere

$$\begin{aligned}\log\left(1-\tfrac{1}{n^2}\right) &= \log\left(\tfrac{n^2-1}{n^2}\right) = \log\left(\tfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \\ &= \log(n-1) + \log(n+1) - 2\log n\end{aligned}$$

elidendo a tre a tre i termini nella espressione della ridotta n-esima S_n della serie si ottiene

$$S_n = \log 2 + \log(n+1) - \log n = -\log 2 + \log(\frac{n+1}{n}) \to -\log 2$$

e la somma della serie è quindi $-\log 2$.

Esercizio 7.5. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

$\boxed{R}$ 11/18.

Serie a termini positivi

Se la successione (a_n) è tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la serie associata si dice *a termini positivi.* In questo caso la successione (s_n) risulta monotona non decrescente, e pertanto ammette limite (finito o infinito). Una serie a termini positivi non può quindi essere indeterminata, ma solo convergente o divergente positivamente. Una proprietà analoga può essere naturalmente stabilita per le serie a termini negativi.

Tranne alcuni casi particolari, non è semplice avere una formula che permetta di calcolare il limite della successione (s_n). Si devono pertanto trovare condizioni che ci dicano se la serie converge o no, anche senza pretendere di determinarne la somma. Le prossime due sezioni danno delle condizioni necessarie e sufficienti.

Criterio dell'integrale

Questa sezione può essere saltata e sostituita con la prossima nel caso in cui non si possieda ancora la nozione di integrale improprio

Teorema 7.6. (Criterio dell'integrale) *Sia* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa e decrescente. Allora l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione Cominciamo con l'osservare che per l'additività dell'integrale si ha

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Poiché f è decrescente, per ogni $x \in [i-1, i]$ si ha

$$f(i) \le f(x) \le f(i-1)$$

da cui, integrando in $[i-1, i]$ e usando il fatto che l'intervallo di integrazione ha ampiezza 1 si ottiene

$$f(i) \le \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx) \le f(i-1).$$

Usando quest'ultima nella (7.1) si ha dunque

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{i=2}^{n} f(i-1)$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, la tesi si ottiene per confronto. $\square$

Criterio di condensazione di Cauchy

Questa sezione può essere saltata nel caso sia stato svolto il criterio dell'integrale della sezione precedente.

Teorema 7.7. (Criterio di condensazione)

Sia (a_n) una successione decrescente di numeri positivi. Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione Osserviamo che, poiché (a_n) è decrescente, valgono le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&a_3 + a_4 \geq 2a_4 \\
&a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^{n+1}} \geq 2^n a_{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ora, se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge, diverge pure la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}}$ e quindi, tenendo conto delle precedenti disuguaglianze, diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

D'altra parte valgono anche le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&a_2 + a_3 \leq 2a_2 \\
&a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}.
\end{aligned}$$

e quindi, se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, converge pure $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Osservazione 7.8. Si osservi che il fatto che le serie del teorema precedente abbiano lo stesso carattere non vuol dire che abbiano la stessa somma, come si può vedere considerando ad esempio le serie degli esempi 7.2, 7.3 e dell'esercizio 7.4.

La serie armonica

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ è detta *armonica.* Tale nome deriva dal fatto che ogni suo termine è la media armonica di quello precedente e di quello successivo, cioè

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con il criterio integrale o con quello di condensazione si vede che la serie armonica è divergente. **Curiosità**: si potrebbe pensare che disponendo di un calcolatore dovrebbe essere facile, con un numero sufficientemente alto di somme, riuscire a stabilire con ragionevole certezza qual'è il carattere di una serie data. Ci si può facilmente rendere conto che non è così provando a "testare" la serie armonica. Si ha infatti $s_{1000} \simeq 7.48$, $s_{1000000} \simeq 14.39$ e per superare 100 occorre sommare la bellezza di circa 10^{43} termini! La serie armonica diverge infatti *molto lentamente.*

Esempio 7.9. *Mostrare che la serie* armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge se* $\alpha > 1$ *e diverge se* $0 < \alpha \leq 1$.

Esercizio 7.10. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}, \qquad \alpha \geq 0.$$

$\boxed{R}$ Diamo due possibili risoluzioni, una con il criterio dell'integrale, l'altra con il criterio di condensazione.
Criterio dell'integrale. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$$

è positiva e decrescente. Si può pertanto applicare il criterio dell'integrale. Col cambiamento di variabile $x = \mathrm{e}^y$ si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x} dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\alpha} dy < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

quindi la serie converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \in [0, 1]$.
Criterio di condensazione. La successione

$$a_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$$

è positiva e decrescente. Si può pertanto applicare il criterio di condensazione. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \log 2} + \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

quindi la serie converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \in [0,1]$.

Una condizione necessaria per la convergenza

Il seguente teorema è utile per provare che una serie non converge.

Teorema 7.11.

> *Se la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è convergente allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione Si ha infatti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

in quanto, essendo la serie convergente, i limiti di (s_n) e di (s_{n-1}) sono finiti e coincidono. □

Esempio 7.12. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+8}$$

non converge, perché il termine generale non è infinitesimo. Anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non converge per lo stesso motivo.

Notiamo che la condizione del teorema è solo necessaria, infatti la serie armonica diverge pur essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Esercizio 7.13. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$\boxed{R}$ Essendo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ non è soddisfatta una condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge.

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Criterio del confronto

Teorema 7.14. (Criterio del confronto)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *due serie a termini positivi ed esista* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n \leq b_n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Allora si ha

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge;*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Dimostrazione Esercizio.

Esercizio 7.15. *Determinare il carattere delle seguenti serie*

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-23}{n^4+5}; \quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+23}{n^4-5}; \quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+23}{n^3+5}; \quad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(-1)^n}}{(\sqrt{n}+\mathrm{e})^3}.$$

$\boxed{R}$ *1.* converge; *2.* converge; *3.* diverge; *4.* converge.

Esercizio 7.16. *Determinare il carattere della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n\ +1}{\sqrt{n^3+1}}$.

$\boxed{R}$ Per $n > 2$ si ha

$$\frac{\log n\ +1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{2\log n}{n^{3/2}}$$

e quest'ultimo è termine generale di una serie convergente, quindi per confronto la serie data converge.

Negli esercizi precedenti si può anche utilizzare il seguente criterio del confronto asintotico la cui dimostrazione si ottiene agevolmente usando il criterio del confronto (teorema 7.14).

Teorema 7.17. (Criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi, e sia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k.$$

1. *Se $k \neq 0, +\infty$ (quindi $a_n = O(b_n)$ per $n \to \infty$) allora le due serie hanno lo stesso carattere;*
2. *se $k = 0$ (quindi $a_n = o(b_n)$ per $n \to \infty$)e la serie $\sum b_n$ converge allora anche la serie $\sum a_n$ converge;*
3. *se $k = +\infty$ (quindi $b_n = o(a_n)$ per $n \to \infty$) e la serie $\sum b_n$ diverge allora anche la serie $\sum a_n$ diverge.*

Criterio della radice

Teorema 7.18. (Criterio della radice)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

1. *Se $\ell < 1$ la serie converge;*
2. *se $\ell > 1$ la serie diverge;*
3. *se $\ell = 1$ nulla si può affermare sul carattere della serie.*

Dimostrazione Se $\ell < 1$, per definizione di limite con $\varepsilon = (1-\ell)/2$ (positivo in quanto $1-\ell > 0$), esiste n_ε tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$, cioè $a_n \leq (\frac{\ell+1}{2})^n$ e quindi la serie converge per confronto con una serie geometrica di ragione positiva minore di 1. Analogamente, se $\ell > 1$, dalla definizione di limite con $\varepsilon = (\ell-1)/2$, esiste n_ε tale che $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{\ell+1}{2}$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$,, cioè $a_n \geq (\frac{\ell+1}{2})^n$ e quindi la serie diverge per confronto con una serie geometrica di ragione maggiore di 1. Nel caso $\ell = 1$ rientrano la serie armonica che diverge e la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ che converge. □

Esercizio 7.19. *Determinare il carattere della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\big)^n$.

$\boxed{R}$ La serie è a termini positivi ed è soddisfatta la condizione necessaria per la

convergenza
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2}\right)^n=0$$
Posto $a_n=\left(\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2}\right)^n$ si ha
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
e la serie converge per il criterio della radice.

Criterio del rapporto

Teorema 7.20. (Criterio del rapporto)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell.$$

1. *Se $\ell<1$ la serie converge;*
2. *se $\ell>1$ la serie diverge;*
3. *se $\ell=1$ nulla si può affermare sul carattere della serie.*

Dimostrazione La dimostrazione è simile a quella del criterio dlla radice. Se $\ell<1$, per definizione di limite con $\varepsilon=(1-\ell)/2$, esiste n_ε tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{\ell+1}{2}$ per ogni $n\geq n_\varepsilon$. Allora, per ogni $m=p+n_\varepsilon$ con $p\in\mathbb{N}$, si ha
$$a_m\leq a_{m-1}\frac{\ell+1}{2}\leq a_{m-2}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2\leq\ldots\leq a_{m-p}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^p\leq a_{n_\varepsilon}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{m-n_\varepsilon}$$
e quindi la serie converge per confronto con una serie geometrica di ragione positiva minore di 1. Analogamente, se $\ell>1$, dalla definizione di limite con $\varepsilon=(\ell-1)/2$, la serie converge per confronto con una serie geometrica di ragione maggiore di 1. Nel caso $\ell=1$ rientrano la serie armonica che diverge e la serie $\sum\frac{1}{n^2}$ che converge. □

Osservazione 7.21. Il criterio della radice è più potente di quello del rapporto in quanto si potrebbe dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell.$$
Questa proprietà (teorema di Cesaro) potrebbe essere utilizzata in una dimostrazione alternativa del criterio del rapporto che faccia uso di quello della radice.

Struttura lineare delle serie convergenti

Utilizzando la definizione di serie e le analoghe proprietà dei limiti, è facile verificare che vale la seguente proprietà:

se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie convergenti e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ è convergente con somma $\lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$.

Definendo nel modo banale la somma e il prodotto per uno scalare di serie convergenti si ha allora che l'insieme delle serie convergenti è dotato di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione numerabile. Esercizio: esibirne una base.

Sebbene il limite del prodotto di due successioni convergenti sia uguale al prodotto dei limiti, è bene rendersi conto che per le serie non vale una proprietà analoga, a meno che non si definisca il prodotto in maniera opportuna.

Esercizio 7.22. Servendosi delle serie geometriche, dimostrare che può accadere che

$$\sum a_n b_n \neq \sum a_n \sum b_n$$

anche se le serie coinvolte sono entrambe convergenti.

Serie a termini di segno non costante

Definizione 7.23.

Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente *se converge la serie $\sum |a_n|$.*

Teorema 7.24.

Se una serie è assolutamente convergente allora è convergente.

Dimostrazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo due nuove successioni di numeri non negativi

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- = -\min\{a_n, 0\} = \max\{-a_n, 0\}$$

che si chiamano rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di a_n e sono ad essa legate dalla relazione

$$a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

Poiché

$$0 \le a_n^+, a_n^- \le |a_n|$$

allora, per il criterio del confronto le serie $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ sono entrambe convergenti, e per la struttura di spazio vettoriale risulta convergente anche la serie $\sum a_n$. $\square$

Esercizi

Esercizio 7.25. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

$$\textit{1.}\ \sum_{n\ge 2} \frac{1}{\log(n!)}; \qquad \textit{2.}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n - 2\cos(2n)}{2^n};$$

$$\textit{3.}\ \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right); \qquad \textit{4.}\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{2+n^2}{1+n^2}.$$

$\boxed{R}$ *1.* Diverge. Infatti, essendo $n! \le n^n$, si ha

$$\frac{1}{\log(n!)} \ge \frac{1}{n\log n}$$

e la serie $\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n\log n}$ diverge per l'esercizio 7.10.

2. La serie è a termini di segno non costante e verifica la condizione necessaria per la convergenza $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Studiamo la convergenza assoluta.

$$\left|\frac{\sin n - 2\cos(2n)}{2^n}\right| \le \frac{3}{2^n}$$

Per confronto la serie converge assolutamente.

3. La serie è a termini positivi e converge perché esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \le \frac{2}{n\sqrt{n}} \quad \forall\, n \ge n_0;$$

dimostrarlo per esercizio usando il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1.$$

4. Avendosi

$$\log\frac{2+n^2}{1+n^2} = \log\left(1 + \frac{1}{1+n^2}\right) \le \frac{2}{1+n^2} \quad \forall\, n \ge n_0$$

la serie converge.

Serie a termini di segno alterno

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{7.2}$$

dove $a_n \geq 0$. Allora è chiaro che il segno dei termini $(-1)^n a_n$ è positivo se n è pari e negativo se n è dispari. In un caso come questo si può studiare la convergenza assoluta, oppure si può ricorrere al seguente criterio di convergenza per serie a termini di segno alterno.

Teorema 7.26. (Criterio di Leibniz)

Se (a_n) è decrescente e convergente a 0 allora la serie (7.2) è convergente.

Dimostrazione Per la decrescenza di (a_n) si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1}$$

quindi si ha che

- la successione (s_{2n}) è decrescente,
- la successione (s_{2n+1}) è crescente,

e perciò $s_{2n} \to \ell$, mentre $s_{2n+1} \to \bar{\ell}$. Inoltre

$$s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$$

quindi le due successioni sono limitate. Allora i due limiti ℓ ed $\bar{\ell}$ sono finiti e si ha

$$\bar{\ell} - \ell = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

cioè $\ell = \bar{\ell}$. Mostriamo ora che $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ell$, cioè che la serie converge. Si ha infatti che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$|s_{2n+1} - \ell| < \varepsilon, \quad \text{e} \quad |s_{2n} - \ell| < \varepsilon$$

pertanto per ogni $n > 2n_\varepsilon + 1$ si ha $|s_n - \ell| < \varepsilon$. □

Esercizio 7.27. *Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Prodotto di due serie

Come abbiamo già osservato, il prodotto termine a termine di due serie, in genere, non converge al prodotto delle somme. Se si vuole introdurre una nozione di prodotto che abbia questa buona proprietà si può pensare di fare nel modo seguente. Date due serie convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$$

si può cercare di scrivere il loro prodotto

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ...)(b_1 + b_2 + b_3 + ...)$$

raggruppando gli addendi i cui indici hanno ugual somma ottenendo

$$(a_1+a_2+a_3+....)(b_1+b_2+b_3+...) = a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+...$$

A secondo membro abbiamo così una serie di termine generale

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$$

Si chiama *prodotto secondo Cauchy* di due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \Big).$$

Se almeno una delle due serie converge assolutamente e l'altra semplicemente con somma rispettivamente S_a e S_b allora la serie prodotto secondo Cauchy converge con somma $S_a \cdot S_b$. Se entrambe le serie convergono assolutamente anche la serie prodotto converge assolutamente. Se le due serie sono entrambe convergenti, ma non assolutamente, la serie prodotto secondo Cauchy può non convergere come mostra il seguente esempio.

Osservazione 7.28. Se le serie partono con l'indice 0 anzichè uno allora il termine generale della serie prodotto secondo Cauchy risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

Esempio 7.29. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che è convergente, ma non assolutamente convergente. Facendo il prodotto secondo Cauchy di questa serie per se stessa otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}. \tag{7.3}$$

Per $1 \leq k \leq n$ si ha $k(n-k+1) \leq n^2$ sicchè

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq 1.$$

Dunque la serie (7.3) non converge, non verificando la condizione necessaria che richiede che il termine generale sia infinitesimo per $n \to +\infty$.

Esercizi

Esercizio 7.30. *Sia* (a_n) *la successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(1 + a_n^2). \end{cases}$$

Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$\boxed{R}$ Per induzione si ottiene facilmente che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte si ha anche

$$a_{n+1} = \log(1 + a_n^2) \leq a_n^2 < a_n$$

per cui (a_n) è decrescente. Detto ℓ il limite, si ha

$$\ell = \log(1 + \ell^2)$$

da cui si ricava $\ell = 0$. Infine

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(1 + a_n^2)}{a_n} = O(a_n) \to 0.$$

e quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 7.31. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+2}}$; 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\log n}{n^3-1}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+n+1}{bn^4+n^3+1}$ *al variare di a e b in $\mathbb{R}$.*

$\boxed{R}$ *1.* convergente; *2.* convergente; *3.* convergente se $a, b \neq 0$ oppure se $a = 0$ e divergente in ogni altro caso.

Esercizio 7.32. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

$\boxed{R}$ Sono entrambe convergenti.

Esercizio 7.33. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

al variare del parametro α in $\mathbb{R}$.

$\boxed{R}$ Converge se $\alpha > 2$, diverge altrimenti.

Esercizio 7.34. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^{\log n}}.$$

Esercizio 7.35. *Sia (a_n) una successione di numeri reali non negativi. Dimostrare che se $\sum_n a_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_n a_n^2$.*

$\boxed{R}$ $\sum_n a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow a_n \leq 1$ definitivamente. Allora $a_n^2 \leq a_n$ definitivamente (perché $a_n \geq 0$) e quindi la tesi segue dal teorema del confronto.

Esercizio 7.36. *Dimostrare che se la serie $\sum_n a_n^2$ converge allora la serie $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge assolutamente.*

$\boxed{R}$ Infatti dalla disuguaglianza tra numeri reali

$$|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

si ha, ponendo $\alpha = a_n$ e $\beta = 1/n$

$$\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

e la tesi segue dal teorema del confronto.