Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 11

Approssimazione del grafico di una funzione

Retta tangente

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $]a, b[$ con derivata continua in un punto $x_0 \in]a, b[$.

Ricordiamo che in queste ipotesi esiste la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ed ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Osservazione 11.1. Tra tutte le rette che passano per il punto $(x_0, f(x_0))$, la retta tangente è quella che "meglio approssima" il grafico di f "vicino" al punto x_0.

Precisiamo meglio il senso di questa affermazione osservando che le infinite rette di equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0), \quad m \in \mathbb{R}$$

passano tutte per il punto $(x_0, f(x_0))$ e godono tutte della proprietà che la distanza tra il valore della funzione in un punto x e il corrispondente punto sulla retta tende a zero quando x tende a x_0, cioè

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)] = 0.$$

Se però chiediamo che tale distanza tenda a zero più velocemente della distanza tra x e x_0, cioè che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

utilizzando il teorema dell'Hôpital si ricava che questo accade se e solo se $m = f'(x_0)$. Quindi, sostituendo la retta tangente al grafico della funzione si commette un errore che tende a zero più velocemente di quanto non succeda operando la sostituzione con qualunque altra retta.

Parabola osculatrice

In maniera analoga ci si può chiedere, se esista, e quale sia, la parabola che meglio approssima il grafico di f tra tutte le parabole che passano per $(x_0, f(x_0))$.

Osserviamo anzitutto che le infinite parabole di equazione

$$y = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

passano tutte per $(x_0, f(x_0))$ e soddisfano tutte la condizione

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) - b(x - x_0)^2] = 0.$$

Se però chiediamo che tale distanza tenda a zero più velocemente della distanza tra x e x_0, cioè che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) - b(x - x_0)^2}{x - x_0} = 0,$$

utilizzando il teorema dell'Hôpital si ricava che questo accade se e solo se $a = f'(x_0)$. Tale condizione è quindi soddisfatta dalle infinite parabole di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + b(x - x_0)^2 \quad b \in \mathbb{R}.$$

Se però chiediamo che tale distanza tenda a zero più velocemente del quadrato della distanza tra x e x_0 (che a sua volta tende a zero più velocemente della distanza tra x e x_0), cioè che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - b(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0,$$

nell'ulteriore ipotesi che f sia derivabile due volte in $]a,b[$ con derivata seconda continua in x_0, utilizzando il teorema dell'Hôpital si ricava che questo accade se e solo se $b = \dfrac{f''(x_0)}{2}$.

Quindi sostituendo al grafico di f la parabola di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

detta *parabola osculatrice*, si commette un errore che tende a zero più velocemente di quanto non succeda operando la sostituzione con qualunque altra parabola.

Se si vuole migliorare ulteriormente l'approssimazione si può cercare, nel caso in cui esista, quale sia il polinomio di grado 3 o, più in generale, di grado n, che meglio approssima la funzione tra tutti quelli che nel punto x_0 assumono il valore $f(x_0)$.