Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 10

Appendice al capitolo 13: sottosuccessioni

Sottosuccessioni

Definizione 10.1. *Sia* (a_n) *una successione. Diciamo che* (a_{n_k}) *è una* sottosuccessione *di* (a_n) *se la successione di numeri naturali*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto n_k \end{aligned}$$

è strettamente crescente.

Si osservi che la successione (a_{n_k}) è il risultato della composizione (come funzioni) di (a_n) e di (n_k), cioè

$$(a_{n_k}) = (a_n) \circ (n_k).$$

Teorema 10.2. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $a_n \to \ell$;
2. *ogni sottosuccessione* (a_{n_k}) *di* (a_n) *tende a* ℓ.

Dimostrazione *2* $\Rightarrow$ *1* è ovvia in quanto tra le sottosuccessioni di (a_n) vi è la successione (a_n) stessa. In altri termini, basta prendere $n_k = k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Rimane da dimostrare che *1* $\Rightarrow$ *2*. Consideriamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$ (quelli $\ell = \pm\infty$ si trattano in maniera analoga; svilupparli per esercizio). Per ipotesi (a_k) converge ad ℓ, cioè, per definizione,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ |a_k - \ell| < \varepsilon \ \forall k > k_\varepsilon. \tag{10.1}$$

Sia n_k una successione strettamente crescente di naturali. Allora si ha necessariamente $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi dalla (10.1) segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon \ \forall k > k_\varepsilon,$$

cioè, per definizione di limite, (a_{n_k}) converge a ℓ. □

Il precedente teorema può essere utilmente applicato per mostrare che una successione non ha limite.

Esempio 10.3. Se $\alpha < -1$ non esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n.$$

Infatti si ha

$$a_n = (-1)^n |\alpha|^n$$

ed essendo $|\alpha| > 1$ allora $a_{2n} \to +\infty$ (infatti per la disuguaglianza di Bernoulli si ha $|\alpha|^{2n} \geq 1 + 2n(|\alpha| - 1)$ e l'affermazione segue per confronto) mentre $a_{2n+1} \to -\infty$ e la successione non ha limite.

Esercizio 10.4. *Dimostrare che le seguenti successioni non hanno limite.*

1. $a_n = \operatorname{sen}\big(n\frac{\pi}{2}\big)$;
2. $a_n = n\big(1 + (-1)^n\big)$;
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1} n$;
4. $a_n = n^{1+(-1)^n}$.

Esercizio 10.5. *Dimostrare che valgono le identità seguenti*

1. $\operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen} n = 2\cos(n+1)\operatorname{sen} 1$,
2. $\cos(n+2) - \cos n = 2\operatorname{sen}(n+1)\operatorname{sen} 1$,

ed utilizzarle per dimostrare che le successioni $a_n = \operatorname{sen} n$ e $b_n = \cos n$ non hanno limite.

$\boxed{R}$ La prima parte è lasciata per esercizio. Veniamo alla seconda. Supponiamo per assurdo che esista il

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = \lambda.$$

Passando al limite nella *1.* si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$$

e passando al limite nella *2.* si trova

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = 0,$$

ma ciò è assurdo perchè allora seguirebbe

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{sen}^2 n + \cos^2 n) = 0$$

contro il fatto che $\operatorname{sen}^2 n + \cos^2 n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.