Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy (`[baiti|freddi]@dimi.uniud.it`)

Capitolo aggiuntivo 9

Funzioni di due o più variabili

Funzioni di n variabili

Sia D un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

è una funzione reale di n variabili reali

Funzioni di due variabili. Esempi e grafici

Se $n = 2$ allora f è una funzione reale di 2 variabili reali. Per rappresentarne il grafico, cioè l'insieme

$$G = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : \ z = f(x, y)\}$$

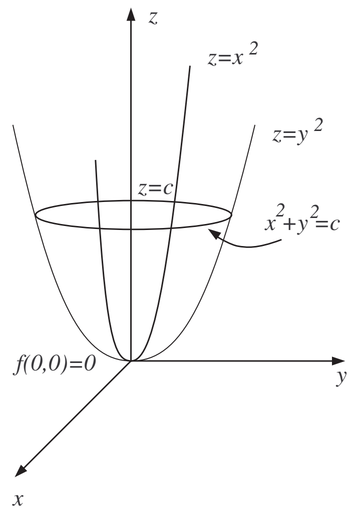
si usa generalmente un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y, z.

Esempio 9.1. La funzione definita su R^2 da

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ha grafico contenuto tutto nel semispazio delle $z \geq 0$. Si ha $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \neq 0$. Le intersezioni del grafico con i piani paralleli al piano xy (di equazione $z = 0$) cioè i piani $z = c$ sono insiemi vuoti se $c < 0$, il solo punto $(0,0)$ se $c = 0$ e circonferenze di raggio $\sqrt{c}$ se $c > 0$ (di equazione $x^2 + y^2 = c$).

Le intersezioni con i piani $x = 0$ e $y = 0$ sono parabole di equazione $z = y^2$ e $z = x^2$, rispettivamente. Con queste informazioni si può fare un disegno approssimativo del grafico che rappresenta un superficie nello spazio detta *paraboloide*.



Esempio 9.2. La funzione definita su $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

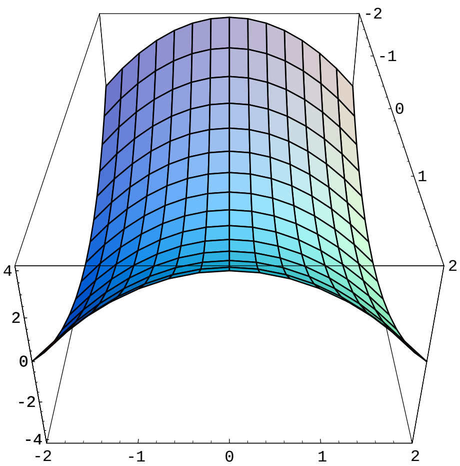
invece non si annulla in un solo punto; l'insieme dei punti in cui si annulla (cioè l'intersezione del grafico con il piano $z = 0$) è infatti costituito dalla coppie (x,y) tali che

$$x^2 - y^2 = 0.$$

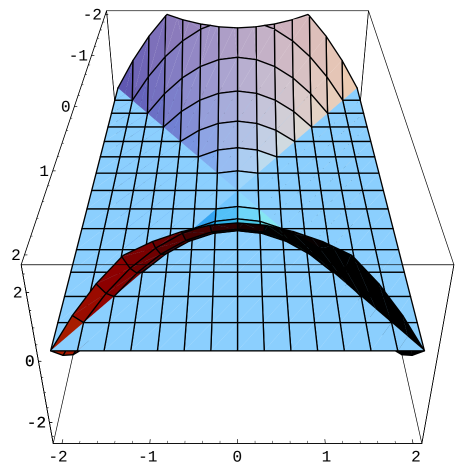
Poiché $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, per la legge di annullamento del prodotto, questo insieme consiste dei grafici delle due rette di equazione

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x$$

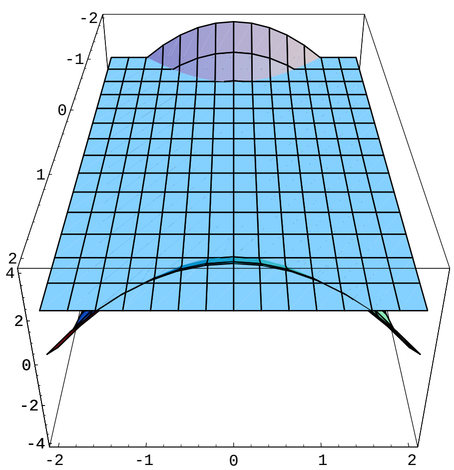
(vedi figura 9.2). Le intersezioni con i piani $x = 0$ e $y = 0$ sono invece le parabole di equazione rispettivamente $z = y^2$ e $z = x^2$. Le intersezioni con i piani $z = c$ sono invece iperboli di equazione $x^2 - y^2 = c$: vedi figure 9.2 e 9.2. Il grafico che si ottiene è una superficie detta *paraboloide iperbolico*, rappresentata in figura 9.2.



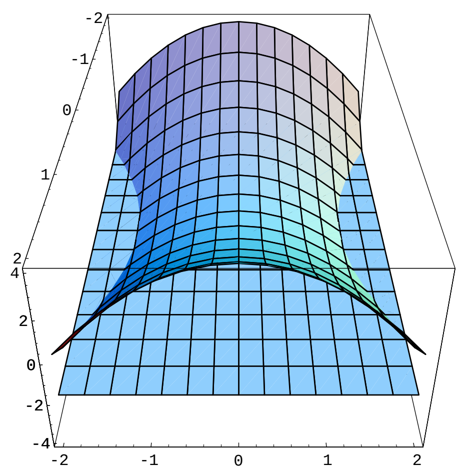
Paraboloide iperbolico: restrizione a $[-2,2]\times[-2,2]$



Paraboloide iperbolico: intersezione col piano $z=0$



Intersezione col piano $z=2$



Intersezione col piano $z=-2$

Limiti

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con D sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Una definizione di limite per $x \to x_0$ ci è già nota nel caso in cui $n = 1$, D è un intervallo e x_0 vi appartiene o è un suo estremo. Se si considera ad esempio la definizione 14.4, si osserva che essa non si estende in maniera ovvia al caso in cui, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, perché in $\mathbb{R}^n$ non sappiamo quale significato attribuire al simbolo $<$ utilizzato nella definizione. Tuttavia, come abbiamo visto ad esempio nell'esercizio 12.4, la definizione di limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$

si può scrivere in altre forme equivalenti, tra cui, nel caso $\ell \in \mathbb{R}$, la seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Questo scritto ha senso anche in $\mathbb{R}^n$ se alle barrette del valore assoluto diamo il significato di *modulo* di vettori di $\mathbb{R}^n$, purché il dominio D soddisfi ad una opportuna condizione (come del resto succedeva in $\mathbb{R}$).

Osserviamo ora che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon\} =$$
$$= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \cdots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta_\varepsilon\}$$

che per $n = 1$ era un intervallo aperto di centro x_0, quando $n = 2$ rappresenta la *parte interna* di un cerchio e per $n = 3$ la parte interna di una palla. Il ruolo degli intervalli è quindi ora giocato dalle *palle aperte* di centro x_0 e raggio δ, cioè dagli insiemi

$$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x - x_0| < \delta\} =$$
$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ (x_1 - x_{01})^2 + \cdots + (x_n - x_{0n})^2 < \delta^2\}.$$

Nel caso $n = 2$ le palle $B_\delta(x_0)$ sono i cerchi pieni di centro x_0 e raggio δ privati del bordo, mentre se $n = 3$ sono le sfere piene di centro x_0 e raggio δ private della superficie sferica esterna. La definizione di limite per funzioni di n variabili si ottiene allora semplicemente sostituendo le palle agli intervalli.

Definizione 9.3.

Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con la proprietà che in ogni palla aperta di centro x_0 cada almeno un punto di D diverso da x_0. Si dice che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

o, equivalentemente, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in B_\delta(x_0) \cap D \setminus \{x_0\}$.

Osservazione 9.4. Un punto x_0 che soddisfa l'ipotesi che ogni palla aperta di centro x_0 contiene almeno un punto di D diverso da x_0 si dice un *punto di accumulazione* per D. Si osservi che questa ipotesi è il minimo che si debba richiedere per essere sicuri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste almeno un punto $x \in D$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ (per far si, cioè, che x possa "tendere" ad x_0).

Nel calcolo dei limiti di funzioni di più variabili valgono le stesse regole algebriche che valevano per i limiti di funzioni di una sola variabile, ma i casi di indeterminazione sono, generalmente, più difficili da trattare, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 9.5. La funzione

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

è definita su $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ è di accumulazione per D, ed ha quindi senso porsi il problema dell'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Numeratore e denominatore tendono a 0 e quindi il limite si presenta in forma indeterminata. Si può però osservare che

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}x^2 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}y^2$$

e che

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

e quindi

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$$

Poiché il secondo membro tende a zero per $(x, y) \to (0, 0)$ allora, per *confronto*, anche il limite di $f(x, y)$ è zero. Si può osservare che la definizione di limite è soddisfatta prendendo $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$.

Esempio 9.6. La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è definita su $\mathbb{R}^2$ (disegnarne il grafico) e si può quindi considerare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

ma questo limite non esiste perché ogni palla di centro $(0,0)$ contiene sia punti in cui la funzione vale 0 sia punti in cui vale 1 e la differenza $|f(x)-l|$ non può allora essere resa minore di (per esempio) $\varepsilon = 1/2$ per nessun valore di δ_ε.

Continuità

La definizione di funzione continua in un punto è del tutto analoga a quella già data nel caso di una sola variabile.

Definizione 9.7.

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice continua in un punto *di accumulazione $x_0 \in D$ se risulta*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se il punto $x_0 \in D$ non è di accumulazione per D (cioè è un punto "isolato") allora si assume per definizione che f sia continua in x_0. f si dice continua in un insieme *D se è continua in ogni punto di D.*

Esempio 9.8. La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ e in particolare è continua in $(0,0)$ (vedi Esempio 9.5).

Esercizio 9.9. *Mostrare che*

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *non esiste;*
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+xy}} = 0$;
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log\sqrt{x^2+y^2} = 0.$

Derivate parziali di funzioni di 2 variabili

Sia f una funzione il cui dominio contenga una palla aperta di centro (x_0, y_0) e sia R il suo raggio. In particolare allora f è definita anche in ogni punto del tipo

$$(x_0 + h, y_0)$$

qualunque sia $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < R$.

Definizione 9.10.

Se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0)}{h} \tag{9.1}$$

allora si dice che f è derivabile parzialmente *rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) e il valore del limite si chiama* derivata parziale *di f rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) e si denota usualmente col simbolo*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Si osservi che il limite (9.1) è un limite usuale di una funzione della sola variabile $h \in \mathbb{R}$. Per indicare la derivata parziale rispetto ad x si usano spesso anche altri simboli tra cui

$$f_x(x_0, y_0), \quad D_x f(x_0, y_0), \quad \partial_x f(x_0, y_0).$$

Si definisce analogamente la derivata parziale rispetto ad y nel punto (x_0, y_0) come il limite (se esiste ed è finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h)}{h}$$

e si denota con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

o altri simboli analoghi a quelli usati per la derivata parziale rispetto ad x.

In conseguenza della definizione le regole di calcolo per la derivata parziale rispetto ad x (o ad y) sono le stesse che valevano per le funzioni di una sola variabile, considerando l'altra variabile come una costante.

Esempio 9.11. La funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

è definita su $\mathbb{R}^2$ ed ha derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che sono definite per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Nel punto $(0,0)$ la funzione non è derivabile parzialmente né rispetto ad x né rispetto ad y.

Esercizio 9.12. *Calcolare, dove esistono, le derivate parziali delle funzioni seguenti.*

1. $f(x,y) = \arctan(y/x)$*;*
2. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$*;*
3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+xy}}$*;*
4. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } xy = 0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$

$\boxed{R}$ *1.* Il dominio di f è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

entrambe definite sul dominio di f.

Gradiente

Sia f una funzione di due variabili derivabile parzialmente in un punto (x_0,y_0). Il vettore delle derivate parziali

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

si chiama *gradiente* di f nel punto (x_0,y_0).

Significato geometrico del gradiente

Quando è diverso da $(0,0)$ il vettore gradiente individua la direzione di *massima pendenza* del grafico della funzione.

Derivate di ordine superiore

Se una funzione ammette derivate parziali in tutti i punti di un dominio D allora possiamo considerare le derivate parziali come funzioni di D in $\mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
$$(x,y) \mapsto \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Se a loro volta queste funzioni ammettono derivate parziali in un punto $(x_0,y_0) \in D$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0,y_0), \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0,y_0), \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0,y_0) \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0,y_0)$$

allora queste ultime sono le *derivate parziali seconde* di f in (x_0,y_0) e si indicano con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0).$$

Esempio 9.13. Calcoliamo le derivate parziali seconde della funzione

$$f(x,y) = \arctan(y/x).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Il fatto che le derivate seconde miste risultino uguali non è una particolarità della funzione considerata, ma è una proprietà comune a tutte le funzioni che hanno derivate seconde miste continue, come afferma il seguente teorema di inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema 9.14. (di Schwarz)

Se una funzione ammette entrambe le derivate seconde miste in una palla di centro un punto (x_0, y_0) e se queste sono continue nel punto (x_0, y_0) allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Mostriamo con un esempio che il teorema non è vero se le derivate seconde miste non sono continue.

Esempio 9.15. La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette derivate seconde miste nel punto $(0,0)$ e si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

È infatti facile calcolare le derivate parziali prime in tutti i punti diversi da $(0,0)$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

e possono essere calcolate in $(0,0)$ utilizzando la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Anche le derivate seconde miste in $(0,0)$ possono essere calcolate usando la definizione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

e l'altra si calcola analogamente. In tutti i punti diversi da $(0,0)$ le derivate seconde miste si possono calcolare invece usando le usuali regole di derivazione, e si può poi controllare che non sono continue in $(0,0)$, anche se questa verifica non è necessaria perché se fossero continue allora, per il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione, dovrebbero essere uguali.

Esercizio 9.16. *Mostrare che la funzione*

$$f(x,y) \begin{cases} y^2 \arctan(x/y) & \textit{se } y \neq 0 \\ 0 & \textit{se } y = 0 \end{cases}$$

ammette derivate seconde miste nel punto $(0,0)$ *ma non sono uguali.*

Matrice Hessiana

Così come le derivate parziali costituiscono un vettore, le derivate seconde possono essere considerate gli elementi di una matrice 2×2

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

detta *matrice Hessiana* di f nel punto (x_0,y_0), e si denota anche col simbolo $\nabla^2 f(x_0)$.

Derivate parziali di funzioni di n variabili

La definizione di derivata parziale rispetto ad una delle due variabili si può estendere facilmente a funzioni di 3 o più variabili.

Sia f una funzione il cui dominio sia un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^n$ contenente una palla aperta di centro $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ e sia R il suo raggio. In particolare allora f è definita anche in ogni punto del tipo

$$(x_0^1, \ldots, x_0^i + h, \ldots, x_0^n)$$

qualunque sia h tale che $|h| < R$.

Definizione 9.17.

Se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0^1,\ldots,x_0^i+h,\ldots,x_0^n)-f(x_0)}{h}$$

allora si dice che f è derivabile parzialmente rispetto ad x_i nel punto x_0 e il valore del limite si chiama derivata parziale *di f rispetto ad x_i nel punto x_0 e si denota usualmente col simbolo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Se f è derivabile parzialmente rispetto ad ogni variabile in un punto x_0 il vettore

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\Big)$$

si chiama gradiente di f in x_0.

Analogamente a quanto fatto per le funzioni di due variabili si possono considerare, se esistono le derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ che costituiscono gli elementi di una matrice quadrata $n\times n$

$$Hf(x_0) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\Big)_{ij}$$

detta matrice Hessiana di f nel punto x_0.

Problemi di massimo e di minimo

Massimi e minimi locali

Definizione 9.18.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: D \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in D$ si dice di massimo locale (o relativo) *per f su D se esiste una palla di centro x_0, $B_\delta(x_0)$, tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D,$$

e si dice di minimo locale (o relativo) *se esiste una palla di centro x_0, $B_\delta(x_0)$, tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D.$$

Definizione 9.19.

Un punto $x_0 \in D$ si dice interno a D *se esiste una palla di centro x_0 tutta contenuta in D.*

Condizione necessaria

Teorema 9.20. (dei punti critici)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di massimo o di minimo locale per f interno a D. Se esiste il gradiente di f nel punto x_0 allora

$$\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$$

cioè tutte le derivate parziali prime in x_0 sono nulle.

DIMOSTRAZIONE Basta osservare che il punto x_0 è un punto di massimo o di minimo locale per le restrizioni di f alle rette di $\mathbb{R}^n$ passanti per x_0 e parallele agli assi coordinati, e utilizzare l'analogo teorema (di Fermat) dimostrato per le funzioni di una sola variabile. □

I punti in cui si annulla il gradiente si dicono *critici* o *stazionari*.

Condizione sufficiente per le funzioni di 2 variabili

Teorema 9.21. (Criterio della matrice Hessiana)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione con derivate parziali seconde continue e (x_0, y_0) un punto interno a D. Se risulta

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det Hf(x_0, y_0) > 0$$

allora

i) se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ il punto è di minimo locale;

ii) se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ il punto è di massimo locale.

Se invece

$$\det Hf(x_0, y_0) < 0$$

allora il punto non è né di massimo né di minimo (si dice in tal caso che è un punto di sella).

Osservazione 9.22. Il teorema non dice nulla sul caso

$$\det Hf(x_0, y_0) = 0$$

nel quale, infatti, può accadere che il punto sia di massimo o di minimo o anche di sella. Si considerino ad esempio le funzioni $f(x, y) = x^2y^2$, $f(x, y) = -x^2y^2$, $f(x, y) = x^3y$.

Esercizio 9.23. *Determinare massimi e minimi locali delle funzioni seguenti*

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$;
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$;
3. $f(x, y) = x^2y - xy$;
4. $f(x, y) = x^2 + xy^2$;
5. $f(x, y) = y^2 - 3y^2x + x^3$;
6. $f(x, y) = (y - x^2)(x^2 + y^2 + 2y)$.

Il criterio della matrice Hessiana è estendibile a funzioni di più di 2 variabili, ma guardare il determinante della matrice Hessiana non è più sufficiente. Si può dare una condizione generale, ma di verifica meno facile. In particolare, se x_0 è critico, una condizione sufficiente affinché sia di minimo è che la matrice Hessiana in x_0 sia *definita positiva*, cioè

$$\langle Hf(x_0)v, v\rangle > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

dive $Hf(x_0)v$ è il prodotto righe per colonne della matrice $Hf(x_0)$ con il vettore colonna v. Se invece risulta

$$\langle Hf(x_0)v, v\rangle < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

cioè l'Hessiana in x_0 è *definita negativa*, allora x_0 è un punto di massimo.