Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 8

Matrici e sistemi lineari

Matrici

Si chiama *matrice* (di numeri reali) di m righe e n colonne o *matrice* $m \times n$ una disposizione di $m \cdot n$ numeri reali a_{ij}, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ secondo lo schema seguente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Così ad esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3.

La matrice (8.1) si indica anche col simbolo $A = (a_{ij})$. i è l'indice di riga, j l'indice di colonna. La matrice A ha m righe e n colonne. Per esempio la terza colonna è

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix}$$

e la seconda riga è

$$(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n}).$$

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata di ordine* n. Una matrice $1\times n$ ha la forma

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n})$$

e si dice *vettore riga*, mentre una matrice $m\times 1$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

e si dice *vettore colonna*.

L'insieme delle matrici $m\times n$ di numeri reali si denota con $\mathbb{R}^{m\times n}$ o con $\mathbb{R}^{mn}$.

Operazioni con le matrici

Somma

Date due matrici $m\times n$ $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ si chiama *somma* di A e B la matrice $C = (c_{ij})$ di elementi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Prodotto per uno scalare

Se $A = (a_{i,j})$ è una matrice $m\times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora la matrice λA di elementi λa_{ij} è il *prodotto* della matrice A con lo scalare λ.

Queste due operazioni godono delle proprietà di cui godevano le analoghe operazioni in $\mathbb{R}^n$ e fanno dell'insieme $\mathbb{R}^{m\times n}$ delle matrici $m\times n$ uno spazio vettoriale.

Prodotto righe per colonne

Le righe e le colonne di una matrice sono vettori, e quindi, quando hanno lo stesso numero n (o m) di componenti se ne può considerare il prodotto scalare. Così, dato un vettore riga $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ed un vettore colonna

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

il loro prodotto è dato da

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Data una matrice $A = (a_{ij})$ $m\times r$ ed una matrice $B = (b_{ij})$ $r\times n$ si definisce *prodotto righe per colonne* di A e B, e si indica con $C = AB$ la matrice $m\times n$ il cui elemento c_{ij} è dato dal prodotto della i-esima riga di A con la j-esima riga di B cioè, in formule

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Esempio 8.1. Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Il prodotto righe per colonne gode della proprietà associativa, cioè

$$(AB)C = A(BC),$$

esiste l'elemento neutro rappresentato dalla matrice $r\times r$

$$I = (\delta_{ij}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

cioè

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ossia una matrice quadrata con 1 sulla *diagonale principale* e 0 fuori. Non gode però della proprietà commutativa, infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre non è garantita l'esistenza dell'elemento inverso rispetto a questo prodotto, cioè non è detto che data una matrice A esista un'altra matrice A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

non ammette alcuna inversa A^{-1}.

Diamo allora la seguente definizione.

Definizione 8.2.

Una matrice quadrata A di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice quadrata A^{-1} di ordine n, detta inversa di A, tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Esempio 8.3. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La nozione di *determinante* che stiamo per introdurre servirà a distinguere le matrici invertibili da quelle non invertibili.

Determinante

Determinante di una matrice 2×2

Data una matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si definisce *determinante* della matrice A il numero reale

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

In termini di determinanti è possibile scrivere le eventuali soluzioni di sistemi di 2 equazioni algebriche lineari in 2 incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Infatti osserviamo prima di tutto che un tale sistema si può scrivere nella forma matriciale

$$AX = B$$

dove $A = (a_{ij})$ è la matrice dei coefficienti,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

è il vettore delle incognite e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

è il vettore dei termini noti e AX denota il prodotto righe per colonne delle due matrici. Coma abbiamo visto nel Capitolo 9 del testo (Geometria Analitica), le soluzioni del sistema sono

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Osserviamo che il sistema ha un'unica soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.

Determinante di una matrice 3×3

Data una matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

considerato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* dell'elemento a_{ij} la matrice 2×2 ottenuta da A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna. Il determinante di A (sviluppato rispetto alla prima riga) si definisce nel modo seguente

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

Il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si chiama *complemento algebrico* di a_{ij}, e quindi il determinante di A è uguale alla somma degli elementi della prima riga per i rispettivi complementi algebrici. Si potrebbe dimostrare che partendo da un'altra riga (o da una colonna) e facendo la somma degli elementi di quella riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici si ottiene ancora come risultato il determinante di A. Per esempio lo sviluppo del determinante rispetto alla seconda colonna è

$$\det A = -a_{12} \det A_{12} + a_{22} \det A_{22} - a_{32} \det A_{32}.$$

È chiaro che se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli allora $\det A = 0$.

Regola di Sarrus

Sviluppando i prodotti si ottiene sempre

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

che è nota come *formula di Sarrus* ed è molto utile per calcolare velocemente il determinante di matrici 3×3.

Determinante di matrici $n\times n$

Sia A una matrice $n\times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* dell'elemento a_{ij} la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna. Il determinante di A si definisce per ricorrenza nel modo seguente

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Abbiamo in questo modo scelto di esprimere il determinate sviluppandolo secondo la i-esima riga. Si ottiene sempre lo stesso numero se anziché sommare sull'indice j si somma su i, cioè se si considera lo sviluppo secondo la j-esima colonna.

Esercizio 8.4. *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proprietà dei determinanti

Proposizione 8.5. (Proprietà fondamentali dei determinanti)

(i) Se due righe o due colonne di una matrice A sono proporzionali allora $\det A = 0$.

(ii) La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (rispettivamente colonna) è uguale a zero, cioè

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ki} \det A_{ji} = 0 \ \textit{se}\ k \neq j.$$

Per dimostrare le proprietà fondamentali utilizzeremo le seguenti altre tre proprietà elementari

1. se A' è una matrice ottenuta da A scambiando due righe o due colonne allora $\det A' = -\det A$.

2. se A' è ottenuta da A moltiplicando tutti gli elementi di una riga o di una colonna per una stessa costante λ allora $\det A' = \lambda \det A$.

3. se A ha due righe o due colonne uguali allora $\det A = 0$.

1. Si vede subito che è vero per le matrici 2×2. Proviamo che è vero per le matrici 3×3 quando si scambia la prima colonna con la terza, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}.$$

Si ha, infatti, sviluppando il determinante di A secondo la prima colonna e quello di A' secondo la terza colonna

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}$$

mentre

$$\det A' = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a'_{i3} \det A'_{i3}$$

e, poiché $(-1)^{i+1} = (-1)^{i+3}$, $a'_{i3} = a_{i1}$ e A'_{i3} è una matrice 2×2 ottenuta da A_{i1} scambiando le colonne e quindi $\det A'_{i3} = -\det A_{i1}$, allora sostituendo si ottiene l'asserto. Gli altri casi relativi alle matrici 3×3 si provano analogamente e il procedimento può essere iterato per matrici di ordine qualunque.
2. Basta sviluppare il determinante di A' rispetto alla colonna o alla riga moltiplicata per la costante e raccogliere λ.
3. Poiché scambiando tra loro due righe o due colonne uguali si riottiene sempre la stessa matrice A allora, per la 1. si ha $\det A = -\det A$ che implica $\det A = 0$.

Dimostrazione (della Proposizione 8.5) *(i)* Supponiamo che la colonna j-esima sia proporzionale a quella k-esima, cioè che esista una costante λ

tale che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} = \lambda a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2j} = \lambda a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} = \lambda a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Per le proprietà 1. e 3. si ha

$$\det A = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

(ii) Basta osservare che la somma

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ki} \det A_{ji}$$

è lo sviluppo del determinante di una matrice A' ottenuta da A sostituendo alla riga j-esima la riga k-esima. Dunque A' ha due righe uguali e quindi il suo determinante è nullo. $\square$

Matrice inversa

Teorema 8.6.

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice di ordine n con $\det A \neq 0$ allora A è invertibile e gli elementi b_{ij} dell'inversa A^{-1} sono

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Dimostrazione Basta eseguire il prodotto righe per colonne di A ed A^{-1} e vedere che risulta uguale alla matrice I. Gli elementi del prodotto righe per colonne sono

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \frac{\det A_{jk}}{\det A} \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det A_{jk} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} \det A & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \ \square. \end{aligned}$$

Sistemi $n\times n$: teorema di Cramer

Consideriamo ora sistemi in cui il numero n di equazioni è pari a quello delle incognite. Essi si presentano nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Le incognite sono x_1, x_2,..., x_n, mentre gli elementi della matrice $A = (a_{ij})$ sono assegnati numeri reali detti *coefficienti*. Anche b_1, b_2,..., b_n sono assegnati e si chiamano *termini noti*. Il sistema si può scrivere in maniera più compatta nella forma matriciale

$$AX = B$$

dove A è la *matrice dei coefficienti o matrice incompleta*,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è il vettore delle incognite e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

è il vettore dei termini noti e AX denota il prodotto righe per colonne delle due matrici. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

si dice *matrice completa*.e indichiamo come prima con $A = (a_{ij})$ la matrice $n\times n$ dei coefficienti, con X il vettore delle incognite e con B quello dei termini noti. Introduciamo inoltre le n matrici B_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ottenute da A sostituendo la colonna i-esima con la colonna dei termini noti. Si ha, in particolare

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 8.7. (di Cramer)

Se $\det A \neq 0$ *allora il sistema lineare* (8.2) *ammette una ed una sola soluzione, data da*

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esercizio 8.8. *È dato il sistema*

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ ax - z = 1 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ *è un parametro.*

a. *Calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.*

b. *Per ogni valore di* a *stabilire se il sistema è risolubile ed eventualmente calcolarne la soluzione.*

Il metodo di Gauss

Il metodo di Cramer per la soluzione di un sistema lineare è molto interessante dal punto di vista teorico perché fornisce un criterio ($\det A \neq 0$) che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione. È però poco utile in pratica, ed in particolare per l'implementazione sul calcolatore, per l'elevato numero di calcoli che il metodo richiede. Infatti esso fornisce la soluzione attraverso il calcolo di $n+1$ determinanti di ordine n. Il calcolo di ciascun determinante di ordine n richiede almeno $n!$ operazioni di moltiplicazione (che sono quelle veramente costose dal punto vista del tempo di calcolo): si ottengono in tutto almeno $(n+1)!$ moltiplicazioni. Ne consegue che un sistema di 25 equazioni in 25 incognite richiede più di 26! operazioni. Questo numero è dell'ordine di 10^{26} e così un computer che possa eseguire un miliardo di moltiplicazioni al secondo impiegherebbe più di 3 miliardi di anni per completare il calcolo.

Così per risolvere sistemi di grandi dimensioni si preferisce utilizzare altri metodi tra cui quello di Gauss, che consiste nel trasformare il sistema lineare in uno equivalente ma di forma *triangolare*. Il sistema triangolare può essere poi facilmente risolto per sostituzione. Dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1.0 supponiamo che $a_{11} \neq 0$, altrimenti permutiamo l'ordine delle equazioni in modo da ricadere in questa situazione;

1.1 se $a_{21} \neq 0$ moltiplichiamo la seconda riga per $-a_{11}/a_{21}$ e sommiamo con la prima, altrimenti lasciamo la seconda equazione così com'è;

1.2 se $a_{31} \neq 0$ moltiplichiamo la terza riga per $-a_{11}/a_{31}$ e sommiamo con la prima, altrimenti lasciamo la terza equazione così com'è;

1.n continuiamo come nei passi precedenti con la quarta riga fino all'n-esima: se $a_{n1} \neq 0$ moltiplichiamo la n-esima riga per $-a_{11}/a_{n1}$ e sommiamo con la prima, altrimenti lasciamo la n-esima equazione così com'è.

A questo punto il sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \quad\vdots \\ \qquad\quad a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è ora

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

2.0 supponiamo che $a_{22} \neq 0$, altrimenti permutiamo l'ordine delle equazioni (lasciando ferma la prima) in modo da ricadere in questa situazione; se ciò non è possibile perché i coefficienti a_{i2} sono tutti nulli da $i = 2$ in poi allora non dobbiamo fare niente e saltiamo tutti i passi successivi;

2.1 se $a_{32} \neq 0$ moltiplichiamo la terza riga per $-a_{22}/a_{32}$ e sommiamo con la seconda, altrimenti lasciamo la terza equazione così com'è;

2.n continuiamo come nel punto precedente con la quarta riga fino all'n-esima: se $a_{n2} \neq 0$ moltiplichiamo la n-esima riga per $-a_{22}/a_{n2}$ e sommiamo con la prima, altrimenti lasciamo la n-esima equazione così com'è.

A questo punto il sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n = b''_n \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è ora

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{pmatrix}$$

Proseguendo in questa maniera si perviene ad un sistema equivalente la cui matrice dei coefficienti è della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2(n-1)} & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3(n-1)} & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Una matrice di questo tipo si dice *triangolare superiore*. A questo punto per risolvere il sistema basta ricavare x_n dall'ultima equazione, poi sostituirla nella penultima e da questa ricavare x_{n-1} e così via fino ad x_1.

Sebbene apparentemente più complicato, questo metodo è facilmente implementabile sui calcolatori e richiede un costo di calcolo molto minore, dell'ordine di n^3 moltiplicazioni per un sistema di ordine n. Un sistema di ordine 25 richiederebbe allo stesso calcolatore di prima un tempo di risoluzione dell'ordine delle decine di milionesimi di secondo.

Sistemi con det $A = 0$ Caratteristica di una matrice $m \times n$

Nel caso dei sistemi $n \times n$, se l'ipotesi del Teorema di Cramer $\det A \neq 0$ non è soddisfatta, però i coefficienti non sono tutti nulli, allora può accadere che il sistema non abbia soluzioni oppure che ne abbia infinite. Abbiamo già osservato che questo può accadere per i sistemi 2×2 se le due equazioni rappresentano rette parallele ma distinte (nessuna soluzione) oppure se rappresentano rette coincidenti (infinite soluzioni) e questo dipende dal valore dei termini noti. Per distinguere questi due casi non basta quindi considerare la matrice dei coefficienti, ma è necessario ricorrere alla matrice completa che però è una matrice $n \times (n+1)$.

Non ha senso parlare di determinante per matrici che non sono quadrate, però da una qualunque matrice rettangolare $m \times n$ si possono ottenere della sotto-matrici quadrate dette *minori* di cui si può considerare il determinante.

Definizione 8.9.

Si chiama caratteristica di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ l'ordine massimo dei minori con determinante non nullo che si possono estrarre da A.

Esempio 8.10. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2.

Tornando ad un sistema 2×2 con determinante nullo, dovendo rappresentare due rette parallele (eventualmente coincidenti) esso si presenta nella forma

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & b_2 \end{pmatrix}$$

Si possono verificare i casi seguenti

1. $b_2 = \lambda b_1$. In tal caso si tratta della stessa retta e vi sono quindi infinite soluzioni. Si osservi che in tal caso la caratteristica della matrice completa è 1, uguale alla caratteristica della matrice dei coefficienti.

2. $b_2 \neq \lambda b_1$. Allora le due rette sono parallele ma distinte e non ci sono soluzioni. Si osservi che in tal caso la caratteristica della matrice completa è uguale a 2, diversa da quella della matrice dei coefficienti che è 1.

Dunque se le caratteristiche di A e di C sono uguali allora esistono soluzioni, mentre se sono diverse non ci sono soluzioni. Si può osservare che questo vale anche se $\det A \neq 0$ perché in tal caso la caratteristica di A è 2 ed è quindi necessariamente uguale a quella di C. Questa condizione vale inoltre per matrici di ogni ordine, e anche per sistemi in cui il numero delle equazioni è diverso da quello delle incognite, e prende il nome di Teorema di Rouché-Capelli.

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Si presentano nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{8.2}$$

Le incognite sono sempre x_1, x_2,..., x_n e indichiamo come prima con $A = (a_{ij})$ la matrice $m \times n$ dei coefficienti, con X il vettore delle incognite e con

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

il vettore dei termini noti.

Il sistema si può scrivere in maniera più compatta nella forma matriciale

$$AX = B$$

dove AX denota il prodotto righe per colonne delle due matrici. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si dice *matrice completa.*

Sistemi $m \times n$: teorema di Rouché-Capelli

Teorema 8.11. (Rouché-Capelli)

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di m equazioni in n incognite (8.2) *abbia soluzioni è che la matrice completa e quella dei coefficienti abbiano la stessa caratteristica.*

Nel caso in cui le soluzioni esistano è poi naturalmente interessante saperle scrivere, anche se sono infinite. A tal scopo, detta k la caratteristica comune delle due matrici si può procedere nel modo seguente:

1. si scelgono k delle m equazioni del sistema in modo che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica k,

2. nel nuovo sistema ottenuto, di k equazioni in n incognite, si scelgono k incognite in modo tale che la matrice dei loro coefficienti abbia determinante non nullo, ed alle rimanenti $n - k$ incognite si attribuiscono valori arbitrari;

3. si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite.

4. gli n numeri così trovati costituiscono una soluzione del sistema $m \times n$. Naturalmente questi n numeri dipendono da $n-k$ costanti arbitrarie e quindi se $n > k$ il sistema ha in effetti infinite soluzioni (si dice che le soluzioni sono ∞^{n-k}).

Esercizio 8.12. *È dato il sistema*

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ ax + 8y = -4 \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

a. Calcolare il determinante della matrice completa.

b. Per ogni valore di a stabilire se il sistema è risolubile ed eventualmente calcolarne la soluzione.

Esercizio 8.13. *Dire se il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

ammette soluzioni e, in tal caso, determinarle.

Esercizio 8.14. *Dire se il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$$

ammette soluzioni e, in tal caso, determinarle.

Esercizio 8.15. *Dire se il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni e, in tal caso, determinarle.

Esercizio 8.16. *Risolvere il sistema $AX = B$ avente come matrice completa quella dell'esempio 8.10.*