

Corso integrato di
Matematica
per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti¹

Lorenzo Freddi¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([[baiti](mailto:baiti@dimi.uniud.it)|[freddi](mailto:freddi@dimi.uniud.it)]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 7

Serie numeriche

Che senso dare ad una somma di infiniti termini è un tema che ha interessato i maggiori matematici del '700, ma che ha radici nell'antichità. Sono infatti famosi in proposito i paradossi del filosofo greco Zenone di Elea vissuto nel v secolo a.C.. L'assetto moderno della teoria delle serie viene però raggiunto solo nelle opere di Cauchy (Cours d'Analyse, 1821).

Supponiamo di avere una successione (a_n) e di voler sommare i suoi termini uno dopo l'altro. Potendo in pratica sommarne solo un numero finito, che “valore” possiamo dare alla somma degli infiniti termini? In qualche caso particolare la risposta si presenta particolarmente semplice. Ad esempio, se $a_n = 1$ per ogni n allora la somma dei primi n termini (partendo da $n = 1$) sarà n ; fissato quindi un qualunque numero reale R , sommando un numero sufficientemente grande di termini, la somma ottenuta supererà R e, in questo senso, diremo che la somma degli infiniti termini diverge a $+\infty$. Viceversa, se $a_n = \frac{1}{2^n}$ allora si vede con un semplice argomento geometrico che la somma di un numero qualunque finito di termini non potrà mai superare 1. Possiamo disporre le varie somme “parziali” in una successione, che risulta crescente e limitata, e pertanto ammette un limite finito $0 < l \leq 1$. Potremmo allora in questo caso (come d'altra parte anche in quello precedente) definire la somma degli infiniti termini come il limite l della successione delle somme parziali.

Serie associata ad una successione

Definizione 7.1.

Data una successione (a_n) di numeri reali, si chiama serie associata ad (a_n) la successione (s_n) definita da

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

i cui elementi sono detti somme parziali. Così la serie associata ad (a_n) è anche detta successione delle somme parziali di (a_n) , mentre a_n si chiama termine generale della serie.

Si dice che la serie è convergente o divergente (positivamente o negativamente) secondo che la successione (s_n) sia convergente o divergente. Se la successione (s_n) non ha limite si dice che la serie è indeterminata.

Se esiste il limite di (s_n) per $n \rightarrow \infty$, allora lo si indica nel modo seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

o, ciò che è lo stesso cambiando semplicemente nome all'indice, con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e tale limite si chiama *somma della serie* (che può pertanto essere finita o infinita).

La serie è quindi la formalizzazione matematica, nell'ambito del calcolo infinitesimale (introdotto solo alla fine del '600 da Newton e Leibniz), dell'idea di "somma di infiniti termini", idea che non è affatto intuitiva, come dimostra l'ampio dibattito che la questione ha suscitato tra i matematici del '700 (tra cui l'italiano Grandi, lo stesso Leibniz, Eulero, Lagrange, D'Alembert, Abel) e le notevoli implicazioni di carattere filosofico che ne sono derivate e che tutt'ora ne derivano; chi fosse interessato alla questione può consultare il divertente libro di Nicholas Falletta "Il Libro dei paradossi" edito da Longanesi (1989), Capitolo 25.

Con abuso di notazione, anche la serie (cioè la successione (s_n)) oltre che

il suo limite si indica col simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Naturalmente se anziché da $n = 0$ l'indice di sommatoria partisse da $n = n_0$ questo cambierebbe l'eventuale somma della serie ma non il suo *carattere*, cioè convergenza, divergenza, indeterminazione.

La serie geometrica

Esempio 7.2. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

è detta *serie geometrica di ragione x*. È possibile dimostrare per induzione che si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{se } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1 - x} & \text{se } |x| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

La denominazione data a questa serie viene dal fatto che ogni termine è la media geometrica tra il precedente e il successivo, cioè $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

Le serie geometriche trovano molteplici applicazioni in vari campi. Per esempio il numero $0.\bar{1}$ non è altro che la somma di una serie geometrica di ragione $1/10$ se la base scelta per la numerazione è 10, mentre se la base è 2 è la somma di una serie geometrica di ragione $1/2$.

La serie di Mengoli

Esempio 7.3. Mostriamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Avendosi

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

elidendo due a due i termini nella espressione di s_n è semplice dedurre che

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

formula che può essere provata per induzione.

Esercizi

Esercizio 7.4. Calcolare la somma delle seguenti serie:

1. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n;$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$

R 1. Ricordando che per le serie geometriche di ragione $|x| < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

allora si ottiene

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} - \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9}.$$

2. Avendosi

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

elidendo a tre a tre i termini nella espressione della ridotta n-esima S_n della serie si ottiene

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right),$$

formula che deve essere provata per induzione, si ha $S_n \rightarrow 1/4$ e questo limite è per definizione la somma della serie.

3. Conviene scrivere

$$\begin{aligned} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \log \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right) = \log \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) = \\ &= \log(n-1) + \log(n+1) - 2 \log n \end{aligned}$$

elidendo a tre a tre i termini nella espressione della ridotta n-esima S_n della serie si ottiene

$$S_n = \log 2 + \log(n+1) - \log n = -\log 2 + \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \rightarrow -\log 2$$

e la somma della serie è quindi $-\log 2$.

Esercizio 7.5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

R 11/18.

Serie a termini positivi

Se la successione (a_n) è tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la serie associata si dice a *termini positivi*. In questo caso la successione (s_n) risulta monotona non decrescente, e pertanto ammette limite (finito o infinito). Una serie a termini positivi non può quindi essere indeterminata, ma solo convergente o divergente positivamente. Una proprietà analoga può essere naturalmente stabilita per le serie a termini negativi.

Criterio di condensazione di Cauchy

Tranne alcuni casi particolari, non è semplice avere una formula che permetta di calcolare il limite della successione (s_n) . Si devono pertanto trovare

condizioni che ci dicano se la serie converge o no, anche senza pretendere di determinarne la somma. Una condizione necessaria e sufficiente è la seguente.

Teorema 7.6. (Criterio di condensazione)

Sia (a_n) una successione decrescente di numeri positivi. Le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

hanno lo stesso carattere.

DIMOSTRAZIONE Osserviamo che valgono le disuguaglianze

$$a_3 + a_4 \geq 2a_4$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8$$

.....

$$a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \cdots + a_{2^{n+1}} \geq 2^n a_{2^{n+1}}.$$

Ora, se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge, diverge pure la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^{n+1}}$ e quindi, tenendo

conto delle precedenti disuguaglianze, diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

D'altra parte valgono anche le disuguaglianze

$$a_2 + a_3 \leq 2a_2$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4$$

.....

$$a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}.$$

e quindi, se $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, converge pure $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Osservazione 7.7. Si osservi che il fatto che le serie del teorema precedenti abbiano lo stesso carattere non vuol dire che abbiano la stessa somma, come si può vedere considerando ad esempio le serie degli esempi 7.2, 7.3 e dell'esercizio 7.4.

Esempio 7.8. Discutere la convergenza, per $\alpha > 0$, di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ è detta *armonica*. Tale nome deriva dal fatto che ogni suo termine è la media armonica di quello precedente e di quello successivo, cioè

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il criterio integrale la serie armonica è divergente. **Curiosità:** si potrebbe pensare che disponendo di un calcolatore dovrebbe essere facile, con un numero sufficientemente alto di somme, riuscire a stabilire con ragionevole certezza qual'è il carattere di una serie data. Ci si può facilmente rendere conto che non è così provando a “testare” la serie armonica. Si ha infatti $s_{1000} \simeq 7.48$, $s_{1000000} \simeq 14.39$ e per superare 100 occorre sommare la bellezza di circa 10^{43} termini! La serie armonica diverge infatti *molto lentamente*.

Esercizio 7.9. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}, \quad \alpha \geq 0.$$

R La successione

$$a_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$$

è positiva e decrescente. Si può pertanto applicare il criterio di condensazione. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log 2} + \infty \iff \alpha > 1$$

quindi la serie converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \in [0, 1]$.

Struttura lineare delle serie convergenti

Utilizzando la definizione di serie e le analoghe proprietà dei limiti, è facile verificare che vale la seguente proprietà:

se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie convergenti e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora la serie $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ è convergente con somma $\lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$.

Sebbene il limite del prodotto di due successioni convergenti sia uguale al prodotto dei limiti, è bene rendersi conto che per le serie non vale una proprietà analoga, a meno che non si definisca il prodotto in maniera opportuna. Illustrare la situazione servendosi di opportuni esempi.

Definendo nel modo banale la somma e il prodotto per uno scalare di serie convergenti si ha allora che l'insieme delle serie convergenti è dotato di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione numerabile. Esercizio: esibirne una base.

Una condizione necessaria per la convergenza

Il seguente teorema è utile per provare che una serie non converge.

Teorema 7.10.

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

DIMOSTRAZIONE Si ha infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$$

in quanto, essendo la serie convergente, i limiti di (s_n) e di (s_{n-1}) sono finiti e coincidono. \square

Esempio 7.11. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n-8}$$

non converge, perché il termine generale non è infinitesimo. Anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non converge per lo stesso motivo.

Notiamo che la condizione del teorema è solo necessaria, infatti la serie armonica diverge pur essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Esercizio 7.12. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}.$$

\boxed{R} Essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ non è soddisfatta una condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge.

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Criterio del confronto

Teorema 7.13. (Criterio del confronto)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi ed esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq b_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Allora si ha

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}.$$

DIMOSTRAZIONE Esercizio.

Esercizio 7.14. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 23}{n^4 + 5}; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 23}{n^3 + 5}; \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(-1)^n}}{(\sqrt{n} + e)^3}.$$

\boxed{R} 1. converge; 2. diverge; 3. converge.

Esercizio 7.15. Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + 1}{\sqrt{n^3 + 1}}$.

\boxed{R} Per $n > 2$ si ha

$$\frac{\log n + 1}{\sqrt{n^3 + 1}} < \frac{2 \log n}{n^{3/2}}$$

e quest'ultimo è termine generale di una serie convergente, quindi per confronto la serie data converge.

Criterio della radice**Teorema 7.16. (Criterio della radice)**

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

1. Se $L < 1$ la serie converge;
2. se $L > 1$ la serie diverge;
3. se $L = 1$ nulla si può affermare sul carattere della serie.

DIMOSTRAZIONE Se $L < 1$ si ha definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$, cioè $a_n \leq (\frac{L+1}{2})^n$ e quindi la serie converge per confronto con una serie geometrica di ragione positiva minore di 1. Analogamente, se $L > 1$ si ha definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{L+1}{2}$, cioè $a_n \geq (\frac{L+1}{2})^n$ e quindi la serie converge per confronto con una serie geometrica di ragione maggiore di 1. Nel caso $L = 1$ rientrano la serie armonica che diverge e la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ che converge. \square

Serie a termini di segno non costante**Definizione 7.17.**

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Teorema 7.18.

Se una serie è assolutamente convergente allora è convergente.

DIMOSTRAZIONE Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo due nuove successioni di numeri non negativi

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = -\min\{a_n, 0\} = \max\{-a_n, 0\}$$

che si chiamano rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di a_n e sono ad essa legate dalla relazione

$$a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

Poiché

$$0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|$$

allora, per il criterio del confronto le serie $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ sono entrambe convergenti, e per la struttura di spazio vettoriale risulta convergente anche la serie $\sum a_n$. \square

Esercizi

Esercizio 7.19. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

$$1. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log(n!)}; \quad 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n - 2 \cos(2n)}{2^n}; \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right);$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n; \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{2 + n^2}{1 + n^2}.$$

\square 1. Diverge. Infatti, essendo $n! \leq n^n$, si ha

$$\frac{1}{\log(n!)} \geq \frac{1}{n \log n}$$

e la serie $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log n}$ diverge per l'esercizio 7.9.

2. La serie è a termini di segno non costante e verifica la condizione necessaria per la convergenza $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Studiamo la convergenza assoluta.

$$\left| \frac{\sin n - 2 \cos(2n)}{2^n} \right| \leq \frac{3}{2^n}$$

Per confronto la serie converge assolutamente.

3. La serie è a termini positivi e converge perché esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \leq \frac{2}{n\sqrt{n}} \quad \forall n \geq n_0;$$

dimostrarlo per esercizio usando il fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1.$$

4. La serie è a termini positivi ed è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$$

Posto $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$$

e la serie converge per il criterio della radice.

5. Avendosi

$$\log \frac{2+n^2}{1+n^2} = \log \left(1 + \frac{1}{1+n^2} \right) \leq \frac{2}{1+n^2} \quad \forall n \geq n_0$$

la serie converge.

Serie a termini di segno alterno

Consideriamo la serie

$$(7.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

dove $a_n \geq 0$. Allora è chiaro che il segno dei termini $(-1)^n a_n$ è positivo se n è pari e negativo se n è dispari. In un caso come questo si può studiare la convergenza assoluta, oppure si può ricorrere al seguente criterio di convergenza per serie a termini di segno alterno.

Teorema 7.20. (Criterio di Leibniz)

Se (a_n) è decrescente e convergente a 0 allora la serie (7.1) è convergente.

DIMOSTRAZIONE Omessa.

Esercizio 7.21. *Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Esercizi

Esercizio 7.22. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n + 2}};$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \log n}{n^3 - 1};$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2 + n + 1}{bn^4 + n^3 + 1} \quad \text{al variare di } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{R}.$$

\boxed{R} 1. convergente; 2. convergente; 3. convergente se $a, b \neq 0$ oppure se $a = 0$ e divergente in ogni altro caso.

Esercizio 7.23. Studiare il carattere delle seguenti serie

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n + 2}{4n + 1} \right)^n;$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}.$$

\boxed{R} Sono entrambe convergenti.

Esercizio 7.24. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

al variare del parametro α in \mathbb{R} .

\boxed{R} Converge se $\alpha > 2$, diverge altrimenti.

Esercizio 7.25. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^{\log n}}.$$

Esercizio 7.26. Sia (a_n) una successione di numeri reali non negativi. Dimostrare che se $\sum_n a_n$ converge allora converge anche la serie $\sum_n a_n^2$.

\boxed{R} $\sum_n a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \leq 1$ definitivamente. Allora $a_n^2 \leq a_n$ definitivamente (perché $a_n \geq 0$) e quindi la tesi segue dal teorema del confronto.

Esercizio 7.27. *Dimostrare che se la serie $\sum_n a_n^2$ converge allora la serie $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge assolutamente.*

\square Infatti dalla disuguaglianza tra numeri reali

$$|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

si ha, ponendo $\alpha = a_n$ e $\beta = 1/n$

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

e la tesi segue dal teorema del confronto.