Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy (`[baiti|freddi]@dimi.uniud.it`)

Capitolo aggiuntivo 6

Il numero e

In questo capitoletto si dimostra l'esistenza del limite della successione $(1+1/n)^n$ che definisce il numero e di neper, provandone la limitatezza e la monotonia.

Limitatezza

Consideriamo la successione

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Come si è visto, il limite per $n \to \infty$ si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Scrivendo la successione nella forma

$$a_n = c^{n \log_c(1+1/n)}, \quad c > 0,\, c \neq 1$$

ci si rende conto che anche questa è una forma indeterminata perché all'esponente c'è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$.

Proviamo che

$$2 \leq a_n \leq 3 \;\; \forall n \geq 1;$$

per provare la prima disuguaglianza basta scrivere i primi due termini della formula del binomio di Newton e osservare che i rimanenti sono tutti non negativi, cioè

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \geq 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Per provare l'altra conviene dimostrare preliminarmente, per induzione (cfr. esercizio 2.7 del capitolo aggiuntivo 2 sul Principio di Induzione), che

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{6.1}$$

e ricordare che (cfr. esercizio 2.2 del capitolo aggiuntivo 2) per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \neq 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{6.2}$$

(in questa formula si pone per *convenzione* $0^0 = 1$). Si ha dunque

$$\begin{aligned}
\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n^k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \text{ (per la 6.1)} \\
&\leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \text{ (per la 6.2)} \\
&= 1 + 2\big(1 - \frac{1}{2^n}\big) \leq 3.
\end{aligned}$$

Monotonia

Calcolando i primi termini della successione si vede che

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

Mostriamo che effettivamente (a_n) è strettamente crescente, cioè che

$$\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \leq \big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dalla formula del binomio di Newton, procedendo come sopra, si ha

$$\begin{aligned}
\big(1+\frac{1}{n}\big)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\\
&\le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})\\
&\le 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(n+1)^{-k} = \big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. Questo limite, compreso tra 2 e 3, si indica con e (ed è chiamato *numero di Neper*); più precisamente si trova

$$\mathrm{e} = 2.71828182845...$$

Dimostreremo che e è un numero irrazionale, come applicazione del calcolo differenziale.