Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 5

Funzioni continue: teoremi notevoli

In questo capitolo si raccolgono, dimostrandoli, i principali teoremi sulle funzioni continue, che non hanno trovato posto nel testo. In particolare si dimostra la continuità della funzione inversa di una funzione continua definita su un intervallo.

Teorema dei valori intermedi

Teorema 5.1.

Sia $f\ :]a,b[\to\ \mathbb{R}$ una funzione continua. f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf_{]a,b[} f$ e $\sup_{]a,b[} f$.

DIMOSTRAZIONE Sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $\inf_{]a,b[} f < c < \sup_{]a,b[} f$. Allora esistono $\alpha, \beta \in]a,b[$ tali che $f(\alpha) < c$ e $f(\beta) > c$. Allora la funzione $g(x) = f(x) - c$ soddisfa alle ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo di estremi α e β. Infatti g è continua al pari di f e

$$g(\alpha)g(\beta) = \big(f(\alpha) - c\big)\big(f(\beta) - c\big) < 0.$$

Dunque esiste un punto x_0 appartenente all'intervallo di estremi α e β, e quindi ad $]a,b[$ tale che $g(x_0) = 0$ e quindi, per definizione di g, si ha $f(x_0) = c$. $\square$

Naturalmente il teorema vale anche se il dominio di f è un intervallo chiuso o semiaperto, perché vale per la restrizione di f alla *parte interna* di tale intervallo (cioè l'intervallo privato degli estremi).

Continuità della funzione inversa

Teorema 5.2.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente (risp. decrescente). Allora

1. *l'immagine di f è un intervallo $[c, d]$ di $\mathbb{R}$;*
2. *l'applicazione $f : [a, b] \to [c, d]$ è biiettiva e la sua inversa $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ è continua e strettamente crescente (risp. decrescente).*

Teoremi analoghi si possono enunciare nel caso di funzioni definite su un intervallo aperto $]a, b[$ nel qual caso l'immagine è anch'essa un intervallo aperto $]c, d[$, e nel caso di funzioni definite su intervalli semiaperti $]a, b]$ (o $[a, b[$), anche non limitati. In questi casi, se f è crescente allora l'immagine è un intervallo $]c, d]$, (risp. $[c, d[$) mentre se f è decrescente allora l'immagine è $[c, d[$ (risp. $]c, d]$).

Dimostrazione *1.* Sia $c = f(a)$ e $d = f(b)$. Poiché f è crescente si ha che $f([a, b]) \subseteq [c, d]$. Proviamo che vale anche l'inclusione opposta $[c, d] \subseteq f([a, b])$, cioè che per ogni punto $y \in [c, d]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$. Se $y = c$ allora prenderemo $x = a$ (poiché $f(a) = c$) e se $y = d$ possiamo prendere $x = d$. Nel caso $c < y < d$ basta applicare il teorema degli zeri alla funzione continua

$$g(x) = f(x) - y$$

che ne soddisfa le ipotesi, infatti $g(a) = c - y < 0$ e $g(b) = d - y > 0$; esiste dunque $x \in]a, b[$ tale che $g(x) = 0$, cioè $f(x) = y$ (alternativamente avremmo potuto applicare il teorema dei valori intermedi direttamente a f).

2. Essendo strettamente monotona, f è iniettiva, e quindi biiettiva sull'immagine, cioè come funzione da $[a, b]$ in $[c, d]$. Pertanto esiste l'inversa $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$; resta da provare che f^{-1} è continua. Poiché f è strettamente crescente, anche f^{-1} è strettamente crescente (cfr. esercizio 4.18 del testo) e pertanto esistono i limiti da destra e da sinistra in ogni punto (dimostrarlo per esercizio). Supponiamo per assurdo che f^{-1} non sia continua in un punto $w \in]c, d[$; allora avremmo che

$$\lim_{y \to w^-} f^{-1}(y) < \lim_{y \to w^+} f^{-1}(y).$$

Poiché f è strettamente crescente si avrebbe allora

$$f\big(\lim_{y \to w^-} f^{-1}(y)\big) < f\big(\lim_{y \to w^+} f^{-1}(y)\big)$$

e poiché f è continua allora

$$\lim_{y \to w^-} f\big(f^{-1}(y)\big) < \lim_{y \to w^+} f\big(f^{-1}(y)\big)$$

cioè

$$\lim_{y \to w^-} y < \lim_{y \to w^+} y$$

da cui seguirebbe l'assurdo $w < w$. Analogamente si ragiona se $w = c$ (nel qual caso il limite da sinistra viene sostituito da $f^{-1}(c) = a$) e se $w = d$ (il limite da destra viene sostituito da $f^{-1}(d) = b$). □

Come conseguenza si ha che le radici sono funzioni continue in quanto inverse delle funzioni ad esponente naturale, e le potenze ad esponente razionale sono continue come composte di funzioni continue.

Teorema di monotonia

Teorema 5.3.

Sia $f : [a, b] \to [c, d]$ continua. f è biiettiva se e solo se f è strettamente monotona.

DIMOSTRAZIONE La necessità segue dal teorema della funzione inversa. Proviamo la sufficienza, cioè che se f è biiettiva allora è strettamente monotona. Supponiamo per assurdo che f non sia strettamente monotona. Allora devono esistere tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) > f(x_3)$$

oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_3)$$

(le uguaglianze non possono valere perché f è biiettiva). In ogni caso si perviene ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo per esempio il primo dei due casi, con il teorema degli zeri è facile mostrare che ogni valore $y \in]\max\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2)[$ viene assunto dalla funzione almeno una volta tra x_1 e x_2 e tra x_2 e x_3, e pertanto f non può essere biettiva. □

Il teorema di Weierstrass

Teorema 5.4.

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$, cioè esistono

$$\min_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad \max_{[a,b]} f.$$

Dimostrazione Dimostriamo l'esistenza del massimo. Per il minimo si procede analogamente (scrivere la dimostrazione in questo caso per esercizio). Prima di tutto dimostriamo che posto

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

esiste una successione $x_n \in [a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se $M = +\infty$ allora, per definizione, la funzione f non è limitata superiormente e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty = M$.

Se invece $M = +\infty$ allora M è il minimo dei maggioranti dell'immagine di f, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$, $M - 1/n$ che è più piccolo di M non può essere un maggiorante, cioè deve esistere $x_n \in [a,b]$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n)$$

e poiché d'altra parte

$$f(x_n) \leq M$$

allora per il teorema del confronto si ha $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

Con questa successione (x_n) ne costruiamo ora un'altra, diciamo $(y_n) \subseteq [a,b]$ che abbia ancora la proprietà

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$$

ma che in più sia convergente ad un punto di $[a,b]$. Per fare ciò applichiamo il metodo di bisezione già utilizzato nella dimostrazione del teorema degli zeri. Consideriamo il punto

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Allora uno dei due intervalli $[a,c]$ o $[c,b]$ deve contenere x_n per un numero infinito di n. Può naturalmente succedere che tutti e due gli intervalli siano di questo tipo, ma non può accadere, siccome i numeri naturali sono infiniti, che entrambi contengano solo un numero finito di termini della successione; si osservi inoltre che questo vale anche se la successione dovesse essere costante da un certo indice in poi. Scegliamo questo intervallo (o uno dei due se entrambi contengono un numero infinito di termini della successione) e lo chiamiamo $[a_1,b_1]$. Si ha

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Sia x_{n_1} qualunque elemento della successione (x_n) che appartiene a $[a_1,b_1]$. Definiamo $y_1 = x_{n_1}$. Sia ora

$$c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

e, ripetendo il ragionamento, consideriamo quello tra i due intervalli $[a_1,c_1]$ e $[c_1,b_1]$ che contenga x_n $(n > n_1)$ per un numero infinito di n e lo chiamiamo $[a_2,b_2]$. Sia x_{n_2} qualunque elemento della successione (x_n) $(n > n_1)$ che appartiene a $[a_2,b_2]$. Definiamo $y_2 = x_{n_2}$. Continuando in questa maniera costruiamo quattro successioni a_n, b_n e c_n e y_n tali che

1. a_n è crescente;
2. $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
3. $c_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$;
4. $a_n \le y_n \le b_n$.

Poiché a_n è monotona e limitata allora esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ e per la *2.* anche $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$ cosicché per la *4.* si ha $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$. Inoltre, poiché $(f(y_n))$ è una successione di elementi di $(f(x_n))$ e quest'ultima converge ad M allora anche $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$. Per la continuità di f si ha allora che

$$f(x_0) = M$$

e questo prova l'asserto. □