Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 4

Successioni definite per induzione

Abbiamo già visto che certe successioni, come ad esempio x^n oppure $n!$ si possano definire per induzione, ponendo

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = g(n, a_n). \end{cases}$$

dove $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione. Tuttavia, non tutte le funzioni g definiscono una successione di numeri reali. Ad esempio, infatti,

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 - 2a_n}. \end{cases}$$

non è una buona definizione, dal momento che $a_2 = \sqrt{1 - a_1} = 1$, ma $a_3 = \sqrt{1 - a_2} = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Esercizio 4.1. *Mostrare che è ben definita e studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}. \end{cases}$$

$\boxed{R}$ Per induzione si vede subito che si ha

$$2 + a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1,$$

pertanto la successione è ben definita. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt{2} > a_1, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_2, \quad a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > a_3.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Dobbiamo provare che $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per $n = 1$, $a_2 \geq a_1$ è vera.
Supponiamola vera per n e la dimostriamo per $n+1$. Essendo $a_{n+1} \geq a_n$ allora

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \geq \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}.$$

Quindi, per induzione la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$a_n \to \ell = \sup a_n.$$

Passando al limite ambo i membri di

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

si ha dunque

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}$$

cioè, elevando al quadrato, risolvendo in ℓ, e osservando che $\ell \geq 0$ si ha $\ell = 2$ oppure $\ell = +\infty$. Ora osserviamo che se il limite è 2 allora, siccome la successione è crescente, deve succedere che $a_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se invece il limite è $+\infty$, allora deve essere $a_n > 2$ per tutti gli n abbastanza grandi. Per induzione si dimostra che $a_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pertanto il limite è 2.

Esercizio 4.2. *Mostrare che è ben definita e studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 \\ a_{n+1} = (a_n - \dfrac{1}{n})^n + \dfrac{1}{n+1}, \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$.

$\boxed{R}$ La successione è ben definita perché la funzione potenza ad esponente naturale è definita su tutto $\mathbb{R}$. Scriviamo alcuni valori della successione.

$$a_1 = \alpha + 2,\ a_2 = (\alpha+1)^2 + \frac{1}{2},\ a_3 = (\alpha+1)^6 + \frac{1}{3},\ a_4 = (\alpha+1)^{24} + \frac{1}{4}$$

e ci viene il sospetto che sia

$$a_n = (\alpha+1)^{n!} + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

Lo dimostriamo per induzione.
Per $n = 1$, $a_1 = (\alpha+1)^1 + 1 = \alpha + 2$ è vera.
Per ipotesi di induzione supponiamo ora che

$$a_n = (\alpha+1)^{n!} + \frac{1}{n};$$

allora

$$a_{n+1} = (a_n - \frac{1}{n})^n + \frac{1}{n+1} = \big((\alpha+1)^{n!}\big)^{n+1} + \frac{1}{n+1} = (\alpha+1)^{(n+1)!} + \frac{1}{n+1},$$

e la (4.1) è quindi vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ha dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big((\alpha+1)^{n!} + \frac{1}{n+1}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0\ , \end{cases}$$

dal momento che, per la disuguaglianza di Bernoulli, si ha

$$(\alpha+1)^{n!} \geq (\alpha+1)^n \geq 1 + n\alpha$$

e quindi, se $\alpha > 0$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha+1)^{n!} = +\infty$ per confronto.

Esercizio 4.3. *Data la successione* (a_n) *definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)} \end{cases}$$

1. *dimostrare che la successione è limitata inferiormente;*
2. *studiarne la monotonia;*
3. *studiarne il comportamento al limite per* $n \to \infty$.

$\boxed{R}$ *1.* Si prova per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. La successione è decrescente. Infatti

$$a_n > a_{n+1} \iff a_n > \frac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)} \iff a_n > -2$$

che è vero perché $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3. Essendo decrescente e inferiormente limitata la successione ammette limite finito ℓ. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n(2+3a_n)}{4(a_n+1)}$$

si deve quindi avere

$$\ell = \frac{\ell(2+3\ell)}{4(\ell+1)}$$

che ha le due soluzioni $\ell = 0$ oppure $\ell = -2$. Poiché i termini della successione sono tutti positivi non può essere $\ell = -2$ e pertanto a_n converge a 0.

Esercizio 4.4. *Sia (a_n) la successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{n}{1+2n}(a_n + 1). \end{cases}$$

1. *Dimostrare che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
2. *dimostrare che (a_n) è monotona;*
3. *studiare il comportamento al limite, per $n \to \infty$.*

$\boxed{R}$ *1.* Lo proviamo per induzione. $a_1 = 0 < 1/2$ è vero. Supponiamo vero che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ e dimostriamo che $a_{n+1} \leq \dfrac{n+1}{2+n}$. Per definizione di a_{n+1} e per l'ipotesi di induzione

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \leq \frac{n}{1+2n}\left(\frac{n}{1+n} + 1\right) = \frac{n}{1+n} \leq \frac{n+1}{2+n}$$

dove l'ultima disuguaglianza si verifica direttamente in quanto equivale a $n(2+n) \leq (1+n)^2$ che, semplificando, diviene $0 \leq 1$.

2. Poiché $a_2 = 1/3 > a_1$, $a_3 = 8/15 > a_2$, $a_4 = 23/35 > a_3$, la successione sembra essere crescente. Dimostriamo quindi che

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per definizione di a_{n+1} è equivalente provare che

$$a_n \leq \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che, dopo le opportune semplificazioni, diventa

$$a_n \leq \frac{n}{1+n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

provata precedentemente.

3. La successione è crescente e superiormente limitata (si osservi che $\dfrac{n}{1+n} \leq 1$) e quindi ha limite $\ell \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1)$$

si ottiene l'equazione

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + 1)$$

che ha l'unica soluzione $\ell = 1$. Pertanto

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$

Esercizio 4.5. *Sia*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{2a_n}. \end{cases} \tag{4.2}$$

1. *Dimostrare che le* (4.2) *definiscono per induzione una successione* (a_n) *di numeri reali.*

2. *Dimostrare che* $a_n > 2$ *per ogni* $n \geq 2$.

3. *Dimostrare che la successione è decrescente da* $n = 2$ *in poi.*

4. *Discutere la convergenza di* (a_n) *e calcolarne l'eventuale limite.*

$\boxed{R}$ *1.* Basta dimostrare che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e questo si può fare per induzione. Infatti $a_1 \neq 0$ mentre $a_n \neq 0$ implica $a_n^2 + 4 \neq 0$ e quindi $a_{n+1} \neq 0$.

2. Lo dimostriamo per induzione. Si ha $a_2 = 5/2 > 2$. Supponiamo che $a_n > 2$ e proviamo che $a_{n+1} > 2$. Infatti ciò equivale a

$$\frac{a_n^2 + 4}{2a_n} > 2 \iff a_n^2 + 4 > 4a_n \iff (a_n - 2)^2 > 0 \iff a_n \neq 2$$

e l'ultima proposizione della catena di equivalenze è vera per ipotesi di induzione.

3. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} < a_n \iff a_n^2 + 4 < 2a_n^2 \iff a_n^2 > 4$$

e questo è vero per ogni $n \geq 2$.

4. Per il teorema sul limite delle successioni monotone la successione è convergente ad un limite finito ℓ. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}$$

si ottiene

$$\ell = \frac{\ell^2 + 4}{2\ell}$$

che ha le soluzioni $l = \pm 2$. Poiché d'altra parte $a_n > 2$ per ogni $n \geq 2$ ne consegue che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2.$$

Esercizio 4.6. *Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2}. \end{cases}$$

$\boxed{R}$ Poiché

$$2 + a_n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la successione è ben definita. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt[4]{2} > a_1, \quad a_3 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} > a_2, \quad a_4 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > a_3.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Dobbiamo provare che $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per $n = 1$, $a_2 \geq a_1$ è vera.
Supponiamola vera per n e la dimostriamo per $n+1$. Essendo $a_{n+1} \geq a_n$ allora

$$a_{n+2} = \sqrt[4]{2 + a_{n+1}^2} \geq \sqrt[4]{2 + a_n^2} = a_{n+1}.$$

Quindi, per induzione la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$a_n \to \ell = \sup a_n.$$

Passando al limite ambo i membri di

$$a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2}$$

si ha dunque

$$\ell = \sqrt[4]{2 + \ell^2}$$

cioè, elevando alla quarta, risolvendo in ℓ, e osservando che $\ell \geq 0$, si ha $\ell = \sqrt{2}$ oppure $\ell = +\infty$. Ora osserviamo che se il limite è $\sqrt{2}$ allora, siccome la successione è crescente, deve succedere che $a_n \leq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se invece il limite è $+\infty$, allora deve essere $a_n > \sqrt{2}$ per tutti gli n abbastanza grandi. Per induzione si dimostra che $a_n \leq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e pertanto il limite è $\sqrt{2}$.

Esercizio 4.7. *Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}. \end{cases}$$

$\boxed{R}$ Cominciamo con l'osservare che $a_2 = 1/2 > a_1$, $a_3 = 5/8 > a_2$. Si può dimostrare che la successione è crescente per induzione, oppure osservando che

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{a_n^2+1}{2} \geq a_n \iff (a_n - 1)^2 \geq 0$$

e che quest'ultima è vera per ogni n.

Ne consegue che la successione ammette limite ℓ, finito o infinito.

D'altra parte la successione è superiormente limitata. Si dimostra infatti facilmente per induzione che 1 è un maggiorante. Ne consegue che $\ell \in \mathbb{R}$. Allora passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$$

si ottiene

$$2\ell = \ell^2 + 1 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Esercizio 4.8. *Studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione (a_n) definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{2}{n}. \end{cases}$$