Corso integrato di

# Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

# Capitolo aggiuntivo 3

# Cardinalità

## Il paradosso dell'hotel infinito

*Immaginiamo un comune albergo, con un numero finito di camere, tutte occupate da clienti. Quando, una mattina presto, arriva un forestiero a chiedere una camera, il proprietario è costretto a mandarlo via con la consueta espressione: "Spiacente. Nessuna libera". In questo caso siamo di fronte a una difficoltà, non a un paradosso.*

*Immaginiamo ora l'hotel più grande di tutti, l'hotel infinito, in cui si trovi un numero infinito di stanze, ciascuna delle quali sia occupata. Supponiamo si presenti un viaggiatore a chiedere una camera. "Spiacente, siamo al completo", dice allegramente il proprietario, "ma posso sicuramente trovarle una sistemazione". Che cosa pensa di fare il proprietario per alloggiare il nuovo arrivato e sciogliere la contraddizione presente nella sua affermazione?*

*Immaginiamo ancora che, nello stesso giorno, si verifichi un nuovo fatto impossibile. Questa volta, sul mezzogiorno, arriva una gran massa di congressisti (presumibilmente da un universo parallelo) e il proprietario si trova di fronte a un numero infinito di nuovi ospiti che chiedono di sistemarsi. Essendo un furbo uomo d'affari, egli pensa che se potesse accogliere tutti i nuovi arrivati farebbe una fortuna. Che cosa può fare?*

> *Questo paradosso fu formulato per la prima volta, nel 1920, dal matematico tedesco David Hilbert. Per procurare una camera a ciascun ospite, propose Hilbert, il proprietario dovrebbe spostare l'ospite che occupa la camera 1 nella camera 2, poi l'ospite della camera 2 nella camera 3, quello della camera 3 nella camera 4, e così via all'infinito. Quindi il nuovo ospite può essere accompagnato dal fattorino nella camera 1, che ora è libera per via degli spostamenti. "È stato relativamente semplice", sorride l'astuto proprietario, soddisfatto di aver dovuto spostare ogni ospite solo di una camera.*
>
> *Il secondo problema del proprietario sembra molto più complicato. Se sistema il numero infinito dei nuovi ospiti uno alla volta, come nel caso precedente, li accontenterà tutti; tuttavia i vecchi ospiti saranno certamente scontenti di essere continuamente spostati in una camera nuova. Hilbert propose la seguente soluzione per il problema del proprietario: spostare il vecchio ospite della camera 1 nella camera 2, quello della camera 2 nella camera 4, quello della camera 3 nella camera 6, quello della camera 4 nella camera 8, e così via all'infinito. Questi cambiamenti porteranno tutti gli infiniti ospiti precedenti nelle camere pari. Il proprietario sarà allora in grado di sistemare il numero infinito di nuovi ospiti nelle camere dispari.*

Nicholas Falletta "Il libro dei Paradossi".

## Il paradosso dell'equinumerosità

L'esistenza di un'applicazione biiettiva tra insiemi con un numero finito di elementi implica che i due insiemi hanno in effetti lo stesso numero di elementi. Nel caso in cui il numero di elementi dei due insiemi non sia finito le cose si complicano. Infatti la mappa $n \mapsto 2n$ è biiettiva da $\mathbb{N}$ nel sottoinsieme proprio dei numeri naturali pari. L'idea paradossale che un insieme ed un suo sottoinsieme proprio possano avere "la stessa quantità di elementi" ha tenuto in scacco i matematici dall'antichità (paradossi di Zenone) fino al 1873, anno in cui Georg Cantor espose la sua teoria sui numeri transfiniti. Va detto tuttavia che, nonostante la teoria di Cantor sia oggi universalmente conosciuta come il prodotto di uno straordinario genio matematico, molti matematici del suo tempo lo contrastarono apertamente. Un contemporaneo francese, Henri Poincaré, ad esempio, definì il lavoro di Cantor "una follia". Fu solo attorno al 1920 che l'opinione dei matematici cominciò a cambiare.

## Equipotenza

**Definizione 3.1.**

*Due insiemi $A$ e $B$ si dicono* equipotenti *(oppure* aventi la stessa cardinalità*) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca, cioè se esiste un'applicazione biiettiva $\varphi : A \to B$. Si scrive allora $\#(A) = \#(B)$.*

Abbiamo visto, nell'esercizio 4.6 del testo, che insiemi finiti con un numero diverso di elementi non possono essere messi in corrispondenza biunivoca, mentre è chiaro che un'applicazione biiettiva può sempre essere data tra insiemi con lo stesso numero di elementi.

**Esempio 3.2.** Gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ sono equipotenti.

**Osservazione 3.3.**

Nell'insieme delle parti di un insieme $U$ l'equipotenza è una relazione di equivalenza. Ogni classe di equivalenza si chiama *numero cardinale* e l'insieme quoziente è l'*insieme dei numeri cardinali.* Indicheremo con $\#(A)$ la classe di $A$. Si osservi che ciò è in accordo con la definizione 3.1.

**Esempio 3.4.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi dell'esempio precedente. Essi appartengono alla stessa classe di equivalenza. Questa classe è il numero cardinale 5. Scriveremo quindi, ad esempio, $\#(B) = 5$.

## Insiemi finiti e infiniti

**Definizione 3.5.**

*Un insieme $A$ si dice* finito *se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A$ è equipotente a $N_n = \{1, \ldots, n\}$. Diremo che $\#(A) = n$. L'insieme $A$ si dice* infinito *se non è finito.*

**Esempio 3.6.** Sia $n \in \mathbb{N}$. L'insieme $N_n$ è finito e $\#(N_n) = n$.

## Insiemi numerabili

**Definizione 3.7.**

*Un insieme $A$ si dice* numerabile *se* $\#(A) = \#(\mathbb{N})$.

È evidente che ogni insieme numerabile è infinito. Gli elementi di un insieme numerabile si possono "numerare", cioè rappresentare nella forma

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

**Esempio 3.8.** Sia $P$ l'insieme dei naturali pari. Si ha $\#(P) = \#(\mathbb{N})$.

**Esempio 3.9.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Più in generale vale la seguente proprietà.

**Proposizione 3.10.**

*Se $X$ ed $Y$ sono insiemi numerabili allora $X \times Y$ è numerabile.*

Dimostrazione Esercizio.

**Proposizione 3.11.**

*L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

**Esempio 3.12.** L'insieme delle frazioni $\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ è numerabile.

A questo punto si potrebbe essere portati a pensare che tutti gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità, ma è subito visto che non è così.

**Esempio 3.13.** L'insieme $S$ delle funzioni $s : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, cioè l'insieme delle successioni di cifre decimali, non è numerabile.

Se infatti lo fosse allora sarebbe possibile mettere i suoi elementi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, cioè disporli in successione nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} s^0 = (a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, \ldots) \\ s^1 = (a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s^n = (a_0^n, a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mostriamo che in questo modo non si può coprire tutto $S$ , cioè che questa funzione da $\mathbb{N}$ in $S$ non può essere suriettiva, esibendo una successione $s$ che non può stare tra quelle sopra elencate; basta prendere $s = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ con

$$b_n = \begin{cases} 7 & \text{se } a_n^n \in \{0,1,2,3,4\} \\ 2 & \text{se } a_n^n \in \{5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

per ogni naturale $n$. Questo $s$ non può essere uguale a $s^0$ perché differisce nella prima cifra, e non può essere uguale ad $s^n$ per alcun $n \geq 1$ perché differisce nell'$n$-esimo elemento $a_n^n$. □

Poiché $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato e $\#(N_n) = n$, anche l'insieme dei cardinali finiti risulta totalmente ordinato. Vale inoltre la seguente proprietà (di monotonia): *se $A$ è un insieme finito, e $C \subseteq A$ allora $\#(C) \leq \#(A)$.* L'ordinamento si può poi estendere a tutti i numeri cardinali dicendo che

$$\#(C) \leq \#(A) \iff \text{esiste un'applicazione iniettiva } \varphi : C \to A.$$

Si verifica facilmente che si tratta di una relazione d'ordine e che sui cardinali finiti coincide con quella indotta da $\mathbb{N}$.

## La definizione cantoriana di infinito

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi infiniti, sulla quale però non tutti i matematici sono d'accordo perché fa uso dell'assioma della scelta[1] che non è accettato da tutti.

**Teorema 3.14.**

*Sia $A$ un insieme. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. *$A$ è infinito;*
2. *$A$ contiene un sottoinsieme numerabile;*
3. *$A$ è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.*

[1] Assioma della scelta: data una partizione $\mathcal{F}$ di un insieme $A$ non vuoto, esiste un sottoinsieme $S \subseteq A$ tale che $\#(S \cap X) = 1$ per ogni $X \in \mathcal{F}$.

## Cardinalità delle parti di un insieme finito

**Teorema 3.15.**

*Sia $X$ un insieme finito di $n$ elementi. Si ha*

$$\#\wp(X) = 2^n.$$

Dimostrazione Procediamo per induzione. L'asserto è vero per $n = 0$. Supponiamolo vero per $n$ e sia $X$ un insieme di $n+1$ elementi. Fissato $x_0 \in X$ si ha

$$\wp(X) = \{A \subseteq X \ : \ x_0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X \ : \ x_0 \in A\}.$$

Poiché i due insiemi a secondo membro sono disgiunti e finiti, la cardinalità dell'unione è data dalla somma delle cardinalità. Avendosi

$$\begin{aligned}&\{A \subseteq X \ : \ x_0 \notin A\} = \wp(X \setminus \{x_0\}),\\ &\{A \subseteq X \ : \ x_0 \in A\} = \big\{A \cup \{x_0\} \ : \ A \in \wp(X \setminus \{x_0\})\big\},\end{aligned}$$

per l'ipotesi di induzione $\#\wp(X \setminus \{x_0\}) = 2^n$ e quindi entrambi gli insiemi hanno cardinalità $2^n$, da cui $\wp(X)$ ha cardinalità $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. □

Grazie a questo teorema, si sarebbe potuto procedere in maniera diversa per definire gli insiemi finiti, e cioè:

1. definizione: $A$ è infinito se ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio;
2. definizione: $A$ è finito se non è infinito;
3. si potrebbe *definire* $\mathbb{N}$ come l'insieme dei cardinali finiti.

## Esistenza di cardinalità grandi

**Teorema 3.16.**

*Per ogni insieme $X$ si ha $\#(X) < \#(\wp(X))$.*

Dimostrazione L'applicazione

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \wp(X) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

è iniettiva, pertanto $\#(X) \leq \#(\wp(X))$. Basta dunque dimostrare che non vale $\#(X) = \#(\wp(X))$. Supponiamo per assurdo che valga l'uguaglianza. Allora esiste una biiezione $\varphi : X \to \wp(X)$. Consideriamo l'insieme

$$D = \{x \in X \ : \ x \notin \varphi(x)\}.$$

Si ha $D \in \wp(X)$. Allora per la suriettività di $\varphi$ esiste $x_D \in X$ tale che $\varphi(x_D) = D$. Ma allora si hanno le seguenti possibilità:

1. $x_D \in D$; per definizione di $D$ allora $x_D \notin \varphi(x_D) = D$, contro l'ipotesi;
2. $x_D \notin D$; per definizione di $D$ allora $x_D \in \varphi(x_D) = D$, contro l'ipotesi.

Non può dunque valere il segno di uguale nella disuguaglianza, e l'asserto è provato. $\square$

## L'ipotesi del continuo

**Assioma**

*Non esiste alcun insieme con cardinalità strettamente compresa tra $\#(\mathbb{N})$ e $\#(\wp(\mathbb{N}))$.*

Tale assioma è accettato da molti matematici ma rifiutato da altri, a differenza dell'Assioma della Scelta che è accettato da quasi tutti. È stato dimostrato che l'ipotesi del continuo (come pure l'assioma della scelta) non è dimostrabile, né è dimostrabile la sua negazione, quindi esistono due matematiche, una con l'ipotesi del continuo, e l'altra senza.