Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 2

Il principio di induzione

Un metodo dimostrativo molto utilizzato in matematica fa uso del seguente *principio di induzione*. Esso è una conseguenza dell'assioma di Peano che introduce l'insieme dei numeri naturali. Poiché i numeri naturali sono stati introdotti in maniera "ingenua", senza ricorrere all'assioma di Peano, assumiamo come assioma il principio di induzione, che quindi non necessita di dimostrazione.

Principio di induzione.

Sia P_n una successione di proposizioni ed $n_0 \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

i) P_{n_0} *sia vera;*

ii) $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ *per ogni numero naturale* $n \geq n_0$.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Esercizio 2.1. *Dimostrare che*

1. $\forall d \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (1+d)^n \geq 1 + nd$ *(disuguaglianza di Bernoulli);*

2. $\forall d \in]-1, 0[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \quad (1+d)^n < \dfrac{1}{1-nd}$.

$\boxed{R}$ *1.* Sia P_n la proposizione $(1+d)^n < \frac{1}{1-nd}$. P_1 è vera, infatti per $n = 1$ si ha $1 + d = 1 + d$. Mostriamo che $\forall n\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Per $n \in \mathbb{N}$ supponiamo dunque vera P_n e proviamo P_{n+1}. Si ha

$$(1+d)^{n+1} = (1+d)^n(1+d)$$

e poiché $1 + d \geq 0$ (grazie all'ipotesi $d \geq -1$), allora per l'ipotesi di induzione (P_n è vera) si ha

$$(1 + d)^n(1 + d) \geq (1 + nd)(1 + d) = 1 + (n + 1)d + nd^2 \geq 1 + (n + 1)d$$

da cui segue che P_{n+1} è vera. Per il principio di induzione, allora, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.2. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \neq 1$ si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

(in questa formula si pone per convenzione $0^0 = 1$).

Esercizio 2.3. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

1. $1 + 2 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2}$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\frac{n(n + 1)}{2}\Big)^2$.

$\boxed{R}$ *3.* Procediamo per induzione. Per $n = 1$ la formula è vera perché si riduce a $1 = 1$. Per ipotesi di induzione la supponiamo vera per n e dimostriamo che vale per $n + 1$, cioè che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{[(n + 1)(n + 2)]^2}{4}.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n + 1)^3 = \frac{[n(n + 1)]^2}{4} + (n + 1)^3 \\ &= (n + 1)^2\Big[\frac{n^2}{4} + n + 1\Big] = (n + 1)^2\frac{(n + 2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Fattoriale di un numero naturale

Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ricordiamo che si denota con $n!$, detto n *fattoriale*, il prodotto dei primi n numeri naturali positivi, cioè

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

È possibile definire $n!$ *per induzione* (o *ricorrenza*) ponendo

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n. \end{cases}$$

Coefficienti binomiali

Se $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, ricordiamo che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ricordando inoltre che $0! = 1$, si ha

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Esercizio 2.4. *Dimostrare che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 1$ vale la formula*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

$\boxed{R}$ Si ha

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{aligned}$$

Formula del binomio di Newton

Vale, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazione Procediamo per induzione. La formula è vera per $n = 0$. La supponiamo vera per n e la proviamo per $n + 1$, cioè

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (b+a)(a+b)^n &= (b+a) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Si osserva ora che, mentre gli esponenti nella prima sommatoria sono già quelli desiderati, quelli della seconda si possono sistemare effettuando il cambiamento di indice $k + 1 = h$ ($\iff$ $k = h - 1$). In tal modo, e ripassando poi all'indice k, si ottiene infatti

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

avendo anche fatto uso di quanto ottenuto nel precedente esercizio 2.4.

Esercizio 2.5. *Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 4$ vale la disuguaglianza*

$$2^n \geq n^2.$$

Esercizio 2.6. *Dimostrare che per ogni $n \geq 6$ si ha*

$$2^n n! \leq n^n.$$

$\boxed{R}$ Per $n = 6$ è vero. Supposto vero per n, si ha

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1)2^n n! \leq 2(n+1)n^n$$

quindi basta mostrare che $2n^n \leq (n+1)^n$, cioè che $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; ma questo è ovvio in quanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \geq 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Esercizio 2.7. *Dimostrare che*

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 2.8. *Dimostrare che*

$$n^n \leq 3^n n! \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$\boxed{R}$ È vero per $n = 1$. Supposto vero per n si ha

$$3^{n+1}(n+1)! = 3(n+1)3^n n! \geq 3(n+1)n^n$$

quindi basta mostrare che $3n^n \geq (n+1)^n$, cioè che $3 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; ma questo segue dagli esercizi 2.2 e 2.7 perchè

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n^k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \text{ (Esercizio 2.7)} \\
&\leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \text{ (Esercizio 2.2)} \\
&= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.9. *Dimostrare che per ogni $y \geq x \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale la disuguaglianza*

$$y^n - x^n \leq (x+y)^{n-1}(y-x).$$

$\boxed{R}$ Per $n = 1$ è vero. Supposto vero per n si ha

$$\begin{aligned}
y^{n+1} - x^{n+1} &= (y^n - x^n)(y+x) + yx^n - xy^n \\
&\leq (x+y)^n(y-x) + xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\
&\leq (x+y)^n(y-x).
\end{aligned}$$