Corso integrato di

Matematica

per le scienze naturali ed applicate

Materiale integrativo

Paolo Baiti[1] Lorenzo Freddi[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italy ([baiti|freddi]@dimi.uniud.it)

Capitolo aggiuntivo 1

Relazioni

Relazioni binarie

Definizione 1.1.

Siano A e B insiemi non vuoti. Chiamiamo relazione (binaria) *tra A e B qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Le relazioni tra A ed A verranno dette relazioni in A.*

Se $\mathcal{R}$ è una relazione, e se $(a, b) \in \mathcal{R}$ scriveremo anche $a\mathcal{R}b$ e diremo che *a è in relazione con b*. Se $A = B$ si parla di *relazione in A*.

Esempio 1.2. Sia $A = \{1, 2, 3\}$, e sia

$$M = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3)\} \subseteq A \times A.$$

M è una relazione in A. Essa potrebbe essere descritta nel modo seguente

$$(x, y) \in M \quad \iff \quad x \in A,\ y \in A \text{ e } x < y.$$

Esempio 1.3. Una relazione tra l'insieme M dei maschi e quello F delle femmine, è l'insieme costituito dalle coppie maschio-femmina tra cui intercorre una "relazione" intesa nel senso comune del termine.

Esempio 1.4. In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relazione $\mathcal{R}$ definita da

$$x\mathcal{R}y \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

è il cerchio di centro 0 e raggio 1.

Esercizio 1.5. Rappresentare graficamente la relazione

$$x\mathcal{R}y \quad \iff \quad |x| + |y| \leq 1.$$

Esercizio 1.6. $\leq$ è una relazione in $\mathbb{R}$. Rappresentarla graficamente.

Esempio 1.7. Il *parallelismo* e la *perpendicolarità* sono relazioni nell'insieme delle rette del piano.

Esempio 1.8. Sia E un insieme. L'inclusione è una relazione nell'insieme delle parti di E.

Il caso più importante di relazione di un insieme in un altro (generalmente diverso dal primo) è quello delle "funzioni", che tratteremo più avanti. Consideriamo ora invece alcune importanti categorie di relazioni di un insieme in sé: quelle di ordine e quelle di equivalenza.

Relazioni di equivalenza

Definizione 1.9.

Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta di equivalenza *quando sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

1. $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$ *(riflessiva)*
2. $\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ *(simmetrica)*
3. $\forall x, y, z \in A \quad x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ *(transitiva).*

Per denotare le relazioni di equivalenza si usano più comunemente i simboli

$$\equiv \quad \text{oppure} \quad \sim$$

Esempio 1.10. La relazione "$x = y$ per ogni x ed y" è di equivalenza su qualunque insieme.

Esempio 1.11. La relazione

$$x \sim y \quad \iff \quad x \text{ ed } y \text{ qualsiasi}$$

è di equivalenza.

Esempio 1.12. Nell'insieme delle rette del piano, la relazione

$$r \sim s \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \text{ è parallela ad } s$$

è di equivalenza. La relazione di perpendicolarità

$$r\mathcal{R}s \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \perp s$$

non è di equivalenza perché non gode né della proprietà riflessiva, né di quella transitiva.

Esempio 1.13. L'equivalenza di proposizioni è una relazione di equivalenza nell'insieme delle proposizioni.

Esempio 1.14. Sia $p \in \mathbb{N}$. La relazione in $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \sim y \qquad &\Longleftrightarrow \qquad x - y \text{ è multiplo di } p \\ &\Longleftrightarrow \qquad \exists r \in \mathbb{Z} \ : \ x - y = rp \end{aligned}$$

è di equivalenza. Si chiama *congruenza modulo* p, e si indica con $\equiv_p$.

Esempio 1.15. Su un insieme di due elementi $X = \{x, y\}$ le relazioni di equivalenza sono tutte e sole le seguenti

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(x, x), (y, y)\} \\ \mathcal{B} &= \{(x, x), (y, y), (x, y), (y, x)\} = X \times X \end{aligned}$$

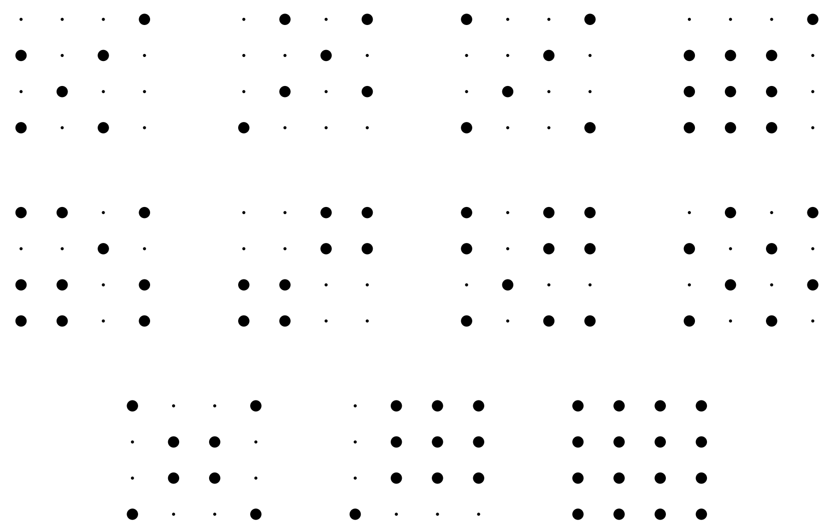
Esempio 1.16. In un insieme di 3 elementi tutte e sole le relazioni di equivalenza sono (graficamente)

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Esercizio 1.17. Scrivere tutte e sole le relazioni di equivalenza in un insieme di 4 elementi.

Esse sono (graficamente)

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$



Insieme quoziente

Sia A un insieme non vuoto e $\sim$ una relazione di equivalenza in A. Per ogni $x \in A$ poniamo

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in A \ : \ y \sim x\} \\ &= \text{ classe di equivalenza di rappresentante } x.\end{aligned}$$

Le classi di equivalenza godono della seguente proprietà.

Proposizione 1.18.

$$\boxed{[x] = [y] \quad \Longleftrightarrow \quad x \sim y.}$$

Dimostrazione Proviamo $\Rightarrow$. Siano x ed y tali che $[x] = [y]$. Sia $z \in [x]$. Allora $z \sim x$ e $z \sim y$. Per la proprietà simmetrica si ha $x \sim z$, e per quella transitiva allora $x \sim y$.

Proviamo $\Leftarrow$. Sia $x \sim y$. Proviamo che $[x] \subseteq [y]$ e che $[x] \supseteq [y]$. Sia $z \in [x]$. Allora $z \sim x$ e poiché $x \sim y$, per la proprietà transitiva si ha $z \sim y$, cioè $z \in [y]$, da cui segue la prima inclusione. Analogamente, supponendo $z \in [y]$ si prova l'altra. $\square$

Teorema 1.19. (del quoziente)

Sia $A \neq \varnothing$ e $\sim$ una relazione di equivalenza in A. Si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ così definita

$$\mathcal{F} = \{X \in \wp(A) \mid \exists x \in A \ : \ X = [x]\} =$$
$$= \{[x] \ : \ x \in A\}.$$

$\mathcal{F}$ è una partizione di A.

$\mathcal{F}$ si chiama *insieme quoziente di A modulo la relazione di equivalenza* $\sim$ e si indica col simbolo $A/_\sim$. Il teorema ora enunciato afferma che una relazione di equivalenza in A determina una partizione di A in classi di equivalenza.

Esempio 1.20. *(Scuola elementare)* Sia S l'insieme (non vuoto) di tutti gli scolari di una scuola elementare. Questo insieme S sarà detto "scuola". In S introduciamo la seguente relazione

$$x, y \in S \quad x \sim y \quad \iff \quad x \text{ e } y \text{ frequentano lo stesso anno di corso}$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza (verificare!). Se lo scolaro $x \in S$ fa la prima allora alla classe di equivalenza di x appartengono tutti gli scolari che fanno la prima, cioè $[x] = 1^a$ classe. Così si trova che

$$A/_\sim = \{1^a \text{ classe}, 2^a \text{ classe}, 3^a \text{ classe}, 4^a \text{ classe}, 5^a \text{ classe}\}$$

e la scuola S risulta così ripartita nell'insieme delle sue classi.

Esempio 1.21. Per la relazione $=$ si ha $A/_= \ = \ \big\{\{a\} \ : \ a \in A\big\}$.

Esempio 1.22. Per la relazione ($x \sim y \iff x$ ed y qualunque) si ha $A/_\sim = \big\{[x]\big\}$ dove x è un qualunque elemento di A.

Esempio 1.23. Per la relazione $r \parallel s$ nel piano Π, si ha $\Pi/_\parallel = \big\{[r] \ : \ r \text{ passa per l'origine}\big\}$.

Esempio 1.24. Per la relazione $\equiv_p$ ($p \in \mathbb{N}$) in $\mathbb{Z}$ si ha

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_p} = \{[0], [1], \cdots, [p-1]\}.$$

Dimostrazione (del teorema del quoziente). Sia $X \in \mathcal{F}$; allora esiste $x \in A$ tale che $X = [x]$. Per la proprietà riflessiva di $\sim$ si ha $x \in [x] = X$, quindi $X \neq \varnothing$, ed è soddisfatta la prima proprietà delle partizioni.

Mostriamo che è soddisfatta anche la seconda. Sia $x \in A$. Allora $[x] \in \mathcal{F}$ e quindi è chiaro che

$$\exists X \in \mathcal{F} \ : \ x \in X$$

infatti basta prendere $X = [x]$. Rimane da provare che tale X è unico, cioè che se supponiamo l'esistenza di un altro $Y \in \mathcal{F}$ tale che $x \in Y$, allora risulta che $Y = X$. Poiché $Y \in \mathcal{F}$ allora esiste $y \in A$ tale che $Y = [y]$. Poiché $x \in Y = [y]$ allora $x \sim y$, e quindi per la proposizione dimostrata in precedenza si ha $[x] = [y]$, cioè $X = Y$. □

Relazioni di ordine

Definizione 1.25.

Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta di ordine *quando sono soddisfatte le seguenti proprietà*

1. $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$ *(riflessiva);*
2. $\forall x, y, z \in A \quad x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ *(transitiva);*
3. $\forall x, y \in A \quad (x\mathcal{R}y)$ e $(y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ *(antisimmetrica).*

Una relazione che soddisfi solo le proprietà riflessiva e transitiva si dice di preordine*.*

Per denotare le relazioni di ordine si usano simboli del tipo

$$\preceq \quad \leq \quad \subseteq .$$

Definizione 1.26.

Sia A un insieme non vuoto e $\leq$ una relazione d'ordine in A. La coppia $(A, \leq)$ si chiama insieme ordinato*.*

Osservazione 1.27. L'unica relazione di equivalenza che sia anche di ordine è l'uguaglianza (provarlo!).

Esempio 1.28. In $\mathbb{R}$ la relazione $x^2 \leq y^2$ non è un ordine; facciamo vedere che cade la proprietà antisimmetrica. La sua negazione è

$$\exists x, y \ : \ (x\mathcal{R}y) \ e \ (y\mathcal{R}x) \ \text{ e } \ \text{non}(x = y)$$

(mostrarlo per esercizio), cioè

$$\exists x, y \ : \ x^2 \leq y^2 \ \text{e} \ y^2 \leq x^2 \ \text{e} \ x \neq y$$

e questo è vero: vanno bene tutti gli x ed y con la proprietà $0 \neq x = -y$ come, ad esempio, $x = 1$ e $y = -1$.

Esempio 1.29. La relazione di inclusione, $\subseteq$, in $\wp(A)$ è di ordine.

Esempio 1.30. La relazione di minore o uguale, $\leq$, in $\mathbb{R}$ è di ordine.

Esempio 1.31. La relazione di minore $<$ in $\mathbb{R}$ non gode della proprietà riflessiva, pertanto non è un ordine.

Definizione 1.32.

Un ordine si dice totale *se (indicato con $\leq$ l'ordine)*

$$\forall x, y \in X \ \textit{si ha} \ x \leq y \ \textit{oppure} \ y \leq x \quad \textit{(dicotomia).}$$

Definizione 1.33.

Un ordine su un insieme X si dice filtrante se (indicando con $\preceq$ l'ordine) si ha

$$\forall x, y \in X \ \exists z \in X \ : \ x \preceq z \ \text{e} \ y \preceq z.$$

Esempio 1.34. La relazione di inclusione in $\wp(A)$ è un ordine filtrante non totale.

Massimo e Minimo

Definizione 1.35.

Sia A un insieme non vuoto, ordinato (cioè dotato di una relazione d'ordine $\leq$). Un elemento $\overline{a} \in A$ si dice massimo *se*

$$a \leq \overline{a} \ \ \forall a \in A.$$

Un elemento $\underline{a} \in A$ si dice minimo *se*

$$a \geq \underline{a} \ \ \forall y \in A.$$

Proposizione 1.36.

In un insieme ordinato con più di un elemento non ci può essere un massimo che sia contemporaneamente minimo.

La dimostrazione verrà fatta *per assurdo*, cioè si suppone che la tesi non sia vera e, attraverso una catena di deduzioni si cerca di ottenere una contraddizione, cioè una proposizione vera insieme alla sua negazione. Poiché ciò è vietato dalla nostra logica possiamo concludere che questo risultato "assurdo" è dovuto al fatto di aver supposto che la tesi sia falsa. Non potendo essere falsa, allora la tesi deve essere vera e la proposizione è dimostrata.

DIMOSTRAZIONE Procediamo per assurdo. Infatti, se $\underline{\overline{a}}$ fosse un tale elemento, ed $a \neq \underline{\overline{a}}$ (un tale a esiste perché l'insieme contiene piú di un elemento) si avrebbe

$$\underline{\overline{a}} \leq a \quad \text{e} \quad \underline{\overline{a}} \geq a$$

da cui, per la proprietà antisimmetrica segue che $a = \underline{\overline{a}}$, contro il fatto che $a \neq \underline{\overline{a}}$. □

Esercizio 1.37. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Dimostrare che X non può avere più di un minimo.*

$\boxed{R}$ Supponiamo che x_1 e x_2 siano due minimi di X. Per definizione allora $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ e

$$x_1 \leq x \ \forall x \in X \quad \text{e} \quad x_2 \leq x \ \forall x \in X.$$

In particolare si ha

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad x_2 \leq x_1$$

da cui, per la proprietà antisimmetrica segue che $x_1 = x_2$, e quindi l'unicità del minimo.

Funzioni

Le funzioni possono essere definite come delle particolari relazioni (anziché, come talvolta si fa, usare il concetto primitivo di "legge").

Definizione 1.38.

Una relazione f tra due insiemi non vuoti A e B si dice funzione *(o* mappa *o* applicazione*) se*[a]

$$\forall x \in A \ \exists!\, y \in B \ : \ (x, y) \in f$$

A si dice dominio *di f, B* codominio *di f. In luogo di $(x, y) \in f$ si scrive usualmente $y = f(x)$, x è la* variabile *ed $f(x)$ il* valore *di f in x.*

[a] il simbolo $\exists!$ si legge: *esiste ed è unico*